TUGAS AKHIR – SM141501

ANALISIS DINAMIKA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR TIPE *SEIRS* YANG BERKAITAN DENGAN TRANSPORTASI ANTAR-DUA KOTA

DEVI YOLANDA
NRP 1209 100 081

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Erna Apriliani,M.Si.

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

FINAL PROJECT – SM141501

ON THE DYNAMIC OF *SEIRS* EPIDEMIC MODEL WITH TRANSPORT-RELATED INFECTION

DEVI YOLANDA
NRP 1209 100 081

Supervisors
Prof. Dr. Erna Apriliani,M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS DINAMIKA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR TIPE *SEIRS* BERKAITAN DENGAN TRANSPORTASI ANTAR-DUA KOTA

ON THE DYNAMICS OF SEIRS EPIDEMIC MODEL WITH TRANSPORT-RELATED INFECTION

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Pemodelan dan Simulasi Sistem
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
DEVI YOLANDA
NRP. 1209100 081

Menyetujui,

Dosen Pembimbing,

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Surabaya, Juli 2016

ANALISIS PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR TIPE *SEIRS* BERKAITAN DENGAN TRANSPORTASI ANTAR-DUA KOTA

NAMA	**: Devi Yolanda**
NRP	**: 1209100081**
Jurusan	**: Matematika**
Dosen Pembimbing	**: Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si**

ABSTRAK

Transportasi antar dua kota merupakan salah satu faktor utama yang mempengaruhi penyebaran penyakit menular. Untuk mengeathui dampaknya, sebuah model penyebaran penyakit menular dengan tipe *SEIRS* diformulasikan dan dianalisis. Analisis model dilihat kestabilan secara bebas penyakit dan endemik dengan menunjukkan kestabilan asimtotik lokal pada keduanya. Hasilnya mengatakan bahwa hubungan transportsi dapat membuat keadaan menjadi endemik pada masing-masing wilayah sehingga orang yang terinfeksi akan semakin bertambah dengan melakukan pepindahan antar dua kota. Tujuannya adalah untuk memberikan informasi untuk mencegah penyebaran lebih luas lagi.

Kata kunci **: kestabilan, model penyebaran *SEIRS*, penyebaran terkait transportasi**

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

ON THE DYNAMICS OF *SEIRS* EPIDEMIC MODEL WITH TRANSPORT-RELATED INFECTION

Nama : **Devi Yolanda**

NRP :**1209100081**

Department : **Matematika**

Supervisors : **Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si**

ABSTRACT

Transportation among cities is found as one of the main factors which affect the outbreak of diseases. To understand the effect of the transport-related infection on disease spread, an *SEIRS* epidemic model for two city is formulated and analyzed. It can be shown by the disease-free and an endemic equilibrium locally asymptoticlly stable. The result shows that transport-related infection intensifies the disease spread if infectious diseases break out to cause an endemic situation in each region, in the sense of that both the absolute and relative size of patients increase. And it shows that the transport-related infection is effected to the number of infected individuals and the duration outbreak in such the way that the disease becomes more endemic due to movement between two cities. This study can be helpful in providing the information to public health authorities to reduce spreading disease when its occur.

Keywords : **stability, SEIRS epidemic model, transport-related infection**

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR ISI

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR TABEL

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR GAMBAR

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR SIMBOL

S	: Jumlah individuSusceptible (rentan penyakit)
E	: Jumlah individu Exposed (terkena penyakit namun belum menampakkan gejala)
I	: Jumlah individuInfected (terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit)
R	: Jumlah individu Recovered (sembuh dari penyakit)
a	: tingkat kelahiran
b	: tingkat kematian alami
c	: laju individu *Exposed* menjadi *Infected*
d	: laju perubahan individu *Infected* menjadi *Recovered*
e	: tingkat kematian alami dan karena penyakit ($e \geq b$)
α_1	: tingkat trasnportasi antar dua kota
α_2	: laju hilangnya kekebalan pada individu *Recovered*
β	: tingkat penularan dalam kota
$\gamma\alpha_1$	: tingkat penularan melalui transportasi antar kota
$\frac{\beta SI}{N}$	: jumlah kasus infeksi baru persatuan waktu
$\frac{\gamma\alpha_1 SI}{N}$	: jumlah kasus infeksi baru antar kota persatuan waktu

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang hendak dibahas, rumusan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari tugas akhir ni

1.1. Latar Belakang

Penyakit menular pada manusia merupakan masalah penting yang dapat terjadi sewaktu-waktu terutama di negara berkembang. Keadaan lingkungan serta cara hidup manusia yang membuang sampah sembarangan menjadi sumber penyakit. Juga sifat manusia yang tak pernah puas untuk memperoleh kehidupan yang lebih baik seperti keinginan untuk belajar di ibu kota, memperoleh pekerjaan layak di kota besar, ingin wisata ke kota maupun negara lain. Penularan penyakit dari suatu orang ke orang lain dapat terjadi secara kontak langsung dengan bersentuhan maupun secara tak langsung yaitu melalui air dan udara[1]. Penularan penyakit secara tak langsung dapat juga terjadi jika kita berpindah dari suatu tempat ke tempat lain. Dengan kata lain perpindahan dengan menggunakan transportasi yang menjadi faktor utama dalam penyebaran penyakit menular. Penyebaran penyakit menular dapat dilihat perilakunya dengan menggunakan model matematika. Model matematika sangat penting untuk menganalisis penyebaran, kestabilan penyebaran serta dapat pula mengontrol penyebaran penaykit menular. Contoh kasus penyebaran penyakit menular secara luas adalah SARS. Model epidemik penularan penyakit menular pertama kali dikemukakan oleh Kernack dan McKendrick[2].

Peneliti sebelumnya telah membahas penyebaran penyakit menular yang berakitan dengan trasnporatsi antar dua kota diantaranya adalah Agis Nisa membahas dengan model penyebaran *SI*, M. Fathoni menganalisis dengan model *SEIS,* Kartikasari membahas penyebaran penyakit dengan model *SIRS* menggunakan Runge-Kutta. Peneliti-peneliti tersebut menganalisis penyebaran penyakit menular dan dilihat kestabilan dari penyebaran penularan penyakit sehingga dapat menjadi referensi para ahli guna mencegah penyebaran yang makin meluas.

Tugas Akhir ini membahas kestabilan penyakit menular antar dua kota yang berkaitan dengan transportasi dan model penyebarannya berdasarkan pada penelitian oleh Depenphedtnog dengan tipe model *SEIRS.*

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini antara lain:

1. Bagaimana kajian model perpindahan penyakit menular yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota?
2. Bagaimana kestabilan dari tiap titik kesetimbangan model epidemik penyebaran penyakit menular tipe *SEIRS* yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota?

1.3. Batasan Masalah

Permasalahan yangdibahas dibatasi pada pembahasan analisis kestabilan adalah:

a. Transportasi terjadi antar dua kota dan diasumsikan kedua kota adalah identik.
b. Transportasi terjadi antar dua kota yang berdekatan.
c. Individu yang berpindah tidak ada yang meninggal atau meninggal dalam perjalanan.
d. Individu *Exposed* tidak dapat sembuh menjadi indivdiu *Susceptible*.
e. Individu yang terinfeksi tidak dapat sembuh dalam perjalanan.

1.4. Tujuan

Tujuan penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengkaji model epidemik penyebaran penyakit menular tipe *SEIRS* yang berkaitan dengan transportasi antar dua kota.
2. Mendapatkan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan dari model epidemik tipe *SEIRS* yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota.

1.5. Manfaat

Penulisan Tugas Akhir ini ditujukan kepada para ahli sebagai referensi untuk melihat pertumbuhan dan perkembangan penyebaran penyakitb menular sehingga dapat mengambil tindakan tegas guna menekan pertumbuhan dan mencegah penyebaran penyakit lebih luas lagi.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan pada masing-masing bab membahas:

Bab I : Pendahuluan

Bab ini berisi mengenai gambaran umum dalam penulisan Tugas Akhir meliputi latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

Bab II : Tinjauan Pustaka

Bab ini memaparkan landasan teori yang digunakan pada proses pengerjaan Tugas Akhir

Bab III : Metode Penelitian

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam proses pengerjaan Tugas Akhir

Bab IV : Analisis dan Pembahasan

Bab ini menyajikan analisis kestabilan lokal dari model penyebaran penyakit menular yang berkaitan dengan transportasi.

Bab V : Kesimpulan

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari penulis mengenai analisis kestabilan lokal dari model penyebaran penyakit menular tipe *SEIRS* berkaitan dengan trasnportasi antar-dua kota.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan apa yang menjadi dasar materi dalam penyusunan Tugas Akhir.

2.1. Penyakit Menular

Penyakit menular dapat didefinisikan sebagai sebuah penyakit yang dapat ditularkan (berpindah dari orang ke orang, bacik secara langsung maupun tak langsung). Penyakit menular atau disebut juga penyakit infeksi dapat disebabkan oleh kuman yang menjangkit tubuh manusia. Kuman dapat berupa virus, bakteri maupun jamur. Penyakit menular dapat menjadi wabah jika terjadi pada daerah yang lebih luas dengan populasi banyak orang misalkan pada sebuah kota. Suatu wabah dapat terbatas pada lingkup kecil dinamakan *outbreak,* dalam lingkup luas dinamakan epidemi dan dalam lingkup global dinamakan pandemi[13]. Terdapat juga endemik yaitu penyakit yang umum terjadi pada laju konstan namun cukup tinggi dalam suatu populasi. Suatu penyakit dikatakan endemik bila setiap orang yang terjangkit menularkannya kepada orang lain. Bila infeksi tersebut tidak lenyap dan jumlah orang yang terjangkit tidak bertambah maka infeksi tersebut dapat dikatakan dalam keadaan endemik (*endemic steady state).*

2.2. Transportasi

Transportasi merupakan pemindahan manusia atau barang dari satu tempat ke tempat lainnya dengan menggunakan alat yang digerakkan oleh manusia, hewan maupun mesin. Transportasi sangat penting bagi manusia karena memudahkan dalam melakukan aktivitas sehari-hari. Terdapat unsur pokok dalam transportasi yaitu manusia (yang membutuhkan transportasi), barang (yang diperlukan manusia), Kendaraan (sebagai sarana trasnportasi), jalan (prasarana transportasi), dan pengelola transportasi. Sebagai fungsinya, transportasi diperlukan untuk mengatasi kesenjangan jarak dan komunikasi antar tempat asal dan tujuan. Berdasarkan caranya transportasi dibedakan menjadi tiga yaitu transportasi darat, laut dan udara[11]

2.3. Model Tipe Penyebaran Penyakit

Model penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi yaitu:

S : *Susceptible*, individu sehat namun rentan terhadap penyakit.

E : *Exposed*, individu yang terjangkit namun belum nampak tanda-tanda penyakit (masa inkubasi).

I : *Infected*, individu yang terkena penyakit dan dapat menularkan penyakit.

R: *Recovered*, individu yang kebal setelah terinfeksi.

Macam-macam tipe model penyebaran penyakit

Tabel 2.1. Model Kompartemen Penyebaran Penyakit[4]

Model	Keterangan
SI	Penyakit tidak dapat disembuhkan
SIS	Penyakit dapat sembuh namun tifak ada kekebalan setelah sembuh (rentan terhadap penyakit)
SIR	Penyakit memperoleh kekebalan permanen dan sembuh dari penyakit
SIRS	Penyakit dapat sembuh namun kekebalan hanya sementara (rentan terhadap penyakit)
SIRI	Penyakit dapat sembuh dan

	kambuh lagi
SEI	Penyakit mengalami masa inkubasi dan tidak dapat disembuhkan
SEIS	Penyakit mengalami masa inkubasi dan dapat sembuh namun tidak ada kekebalan setelah sembuh (rentan terhadap penyakit)
SEIR	Penyakit mengalami masa inkusbasi dan memperoleh kekebalan permanen serta sembuh dari penyakit
SEIRS	Penyakit mengalami masa inkubasi namun kekebalan bersifat sementara (rentan terhadap penyakit)

Tugas Akhir ini membahas mengenai model epidemik dengan tipe *SEIRS[3]*.

2.4. Titik Kesetimbangan

Pandang persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \qquad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

Sebuah titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ merupakan titik kesetimbangan jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka fungsi konstan $x(t) = \bar{x}_0$ dan $y(t) = \bar{y}_0$ adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan untuk semua t.

2.5. Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan lokal pada titik setimbang ditentukan oleh bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan.

2.6. Linearisasi

Sistem Linear memiliki kelebihan dibandingkan dengan sistem yang tak linear yaitu sistem linear lebih mudah diperoleh penyelesaiannya. Maka pada sistem nonlinear akan didekati dengan sistem linear yang dinamakan Linearisasi.

Diketahui sistem (2.1) dengan titik kesetimbangan (x_0, y_0). Misalkan $x = x_0 + u$ adalah tiitk di sekitar x_0 dan $y = y_0 + v$ adalah titik di sekitar y_0, maka persamaan (2.1) dapat ditulis:

$$\frac{d(x_0+u)}{dt} = f(x_0 + u, y_0 + v)$$
$$\frac{d(y_0+u)}{dt} = g(x_0 + u, y_0 + v) \tag{2.2}$$

Karena u, v sangat kecil maka dapat dideretkan dengan deret Taylor di sekitar (u_0, v_0):

$$f(x, y) = \frac{d(x_0+u)}{dt}$$

$$= f(x_0, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o)\, u + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o)\, v +$$
suku kedua tingkat atas

$$g(x, y) = \frac{d(y_0+u)}{dt}$$

$$= g(x_0, y_o) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o)\, u +$$
$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o)\, v$ +suku kedua tingkat atas

Karena $f(x_0, y_o) = 0, g(x_0, y_o) = 0$ dan u, v cukup kecil (suku tingkat dua ke atas dapat diabaikan) sehingga diperoleh:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o)\, u + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o)\, v \tag{2.3}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o)\; u + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o)\; v$$

Atau dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dt}(x_0, y_0) & \frac{df}{dt}(x_0, y_0) \\ \frac{dg}{dt}(x_0, y_0) & \frac{dg}{dt}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Merupakan hasil matriks linearisasi pada titik kesetimbangan (x_0, y_0) dan disebut matriks Jacobian. Ukuran matriks bergantung pada banyaknya persamaan sistem.

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

2.7. Akar-Akar Persamaan Karakteristik

Definisi

Jika J adalah matriks Jacobian dari matriks berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi :

$$Jx = \lambda x$$

Untuk skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai karakteristik dari matriks J yang berukuran $n \times n$, maka persamaan di atas sebagai $Jx = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(J - \lambda I)x = 0$ akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$|J - \lambda I| = 0$$

Guna memudahkan mencari determinan dari matriks Jacobian digunakanlah matriks partisi. Matriks partis merupakan suatu matriks yang dibagi menjadi dua atau lebih submatriks. Pembagian menjadi submatriks dapat dilakukan menurut baris dan (atau) kolom dan ditandai dengan garis horizontal dan (atau) vertical secara terputus-putus.

2.8. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz adalah sebuah prosedur analitik untuk menentukan apakah semua akar-akar persamaan karajteristik sistem terletak di sebelah kiri sehingga dapat menentukan kestabilan sebuah sistem. Kriteria ini memberikan jumlah akar-akar persamaan karakteristik sistem yang negatif

Kriteria Routh-Hurwitz diaplikasikan melalui beberapa tahap. Tahap awal adalah menghasilkan persamaan karakteristik yang berbentuk sebuah polinomial dari blok diagram sistem yang akan dianalisa, seperti berikut:

$$PK = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \cdots + A_{n-1}\lambda^1 + A_n \qquad (2.4)$$

Kemudian tahap berikutnya adalah menyusun persamaan karakteristik tersebut dalam susunan matriks, yang dikenal dengan Array Routh. Pada Array Routh ini, dua baris pertamanya adalah koefisien-koefisien dari polinomial persamaan karakteristik (2.4)

Tabel 2.2. Tabel Array Routh

$$\begin{array}{c|cccc}
\lambda^n & A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & \ldots \\
\lambda^{n-1} & A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & \ldots \\
\lambda^{n-2} & B_1 & B_2 & B_3 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\lambda^1 & L_1 & L_2 & L_3 & \\
\lambda^0 & M_1 & M_2 & M_3 &
\end{array}$$

Kolom-kolom yang berasal dari polinomial persamaan karakteristik diletakkan sesuai dengan array Routh sedangakn variabel lainnya mengikuti aturan:

$$B_1 = -\frac{1}{A_{n-1}}\begin{vmatrix} A_n & A_{n-2} \\ A_{n-1} & A_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$B_2 = -\frac{1}{A_{n-1}}\begin{vmatrix} A_n & A_{n-4} \\ A_{n-1} & A_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$C_1 = -\frac{1}{A_{n-1}}\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \text{ dst}$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, jumlah akar-akar persamaan karakteristik yang terletak di sebelah kanan bidang *s (*bernilai negatif) sama dengan jumlah perubahan tanda pada kolom pertama dari array Routh. Dari kesimpulan ini dapat ditentukan kestabilan sistem.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan megenai langkah-langkah dalam melakukan analisis kestabilan dari model penyebaran penyakir yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota. Langkah-langkah pengerjaannya adalah:

3.1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan dan pengkajian informasi yang akan digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir baik dari buku, jurnal maupun sumber yang berkaitan.

3.2. Mengkaji Model Penyebaran Penyakit Tipe *SEIRS* yang Berkaitan dengan Transportasi Antar-Dua Kota

Tahap ini mengkaji model epidemik penyebaran penyakit menular yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota yang akan dijelaskan komponen, parameter amupun asumsi yang diperlukan untuk membentuk model epidemik penyebaran penyakit. Model akan dibagi enjadi tiga yaitu model dengan individu tidak berpindah, model dengan hanya individu *Susceptible* dan *Exposed* yang berpindah, model dengan semua individu berpindah.

3.3. Menentukan Titik Kesetimbangan

Dalam tahap ini ditentukan titik-titik kesetimbangan dari tiap model epidemik penyebaran penyakit yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota yaitu titik invariabt terhadap waktu dimana turunan pertama dari persamaan bernilai nol.

3.4. Menganalisis Kestabilan Lokal

Tahap ini menganalisis kestabilan lokal dari masing-masing titik kesetimbangan. Langkah pertama adalah melakukan pelinearan kemudian mencari matriks Jacobian dari fungsi yang ada. Setelah itu mencari nilai eigen dari persamaan karakteristik. Kestabilan masing-masing titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan mempertimbangkan semua nilai eigen. Kestabilan berdasarkan nilai eigen dapat juga dilihat dengan menggunakan metode Kestabilan Routh-Hurwitz.

3.5. Melakukan Simulasi dan Interpretasi

Pada tahap ini dilihat kestabilan penyebaran penyakit menular yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota dan ditampilkan dalam bentuk grafik.

3.6. Penarikan Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil analisis kestabilan model penyebaran penyakit menular yang berkaitan dengan transporatsi antar-dua kota.

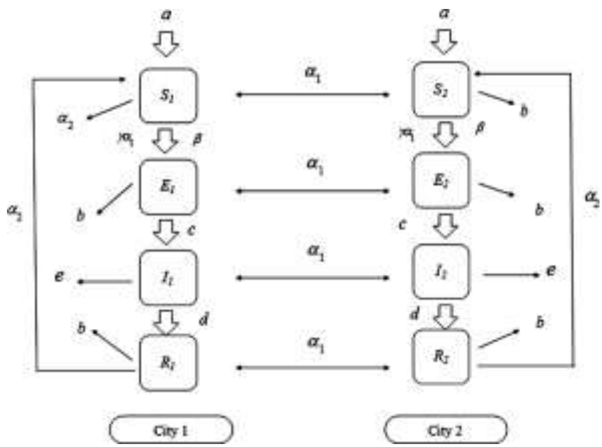
BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai model penyebaran penyakit menular yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota, titik kesetimbangan, kestabilan lokal, serta hasil simulasi. Model akan dibedakan menjadi tiga berdasarkan perpindahan individu yaitu tanpa adanya perpindahan individu, hanya individu *Susceptible* dan *Exposed* yang berpindah, semua individu berpindah.

4.1. Model Epidemik Penyebaran Penyakit Menular Tipe *SEIRS* Antar-Dua Kota

Alur penyebaran epidemik tipe S*EIRS* ditunjukkan oleh diagram berikut:



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Menular Tipe *Seirs*

Model epidemic SEIRS adalah model matematika dari penyakit menular yang terdiri dari *susceptible* (individu yang rentan), *exposed (*individu yang menampakkan gejala), *infected* (kelompok individu yang dapat menyebabkan infeksi), *recovered* (kelompok individu yang sembuh dari sakit) dimana individu yang telah sembuh memiliki system imun sementara sehingga dapat tertular kembali.

Pada individu Susceptible, populasi individu ini bertambah seiring adanya tingkat kelahiran a, individu Recoverd menjadi sembuh dengan tingkat α_2 kemudian adanya perpindahan individu Susceptible dari kota i ke kota $j(j \neq i, i = 1{,}2)$ dengan tingkat α_1. Kelompok individu Susceptible dapat berkurang jika adanya kematian secara alami dengan tingkat b kemudian adanya perpindahan individu dari kota j ke kota i dengan tingkat α_1, adanya kontak dalam antara individu rentan dengan terinfeksi dengan tingkat $\frac{\beta S_i I_i}{N_i}$, adanya perpindahan individu dari kota j ke i dan penyebaran penyakit antar kota dilambangkan dengan $\frac{\gamma \alpha_1 S_j I_j}{N_j}$. Persamaan dari individu Susceptible ialah

$$\frac{dS_i}{dt} = a - bS_i - \frac{\beta S_i I_i}{N_i} + \alpha_2 R_i - \alpha_1 S_i + \alpha_1 S_j - \frac{\gamma \alpha_1 S_j I_j}{N_j} \qquad (4.1a)$$

Bertambahnya individu Exposed disebabkan oleh kontak antar individu rentan dan terinfeksi dalam kota sehingga individu rentan menampakkan gejala dengan tingkat $\frac{\beta S_i I_i}{N_i}$, dan perpindahan individu dari kota i ke j beserta penualran penyakitnya dengan tingkat $\frac{\gamma \alpha_1 S_j I_j}{N_j}$ serta perpindahan individu Exposed dari kota j ke i dengan tingkat α_1. Kelompok individu Exposed akan berkurang dengan adanya perubahan individu Exposed menjadi Infected dengan tingkat c, adanya kematian alami dengan tingkat b, adanya perpindahan individu

ke kota lain dengan tingkat α_1. Persamaan individu Exposed:
$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{\beta S_i I_i}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_i + \alpha_1 E_j + \frac{\gamma \alpha_1 S_j I_j}{N_j} \tag{4.1b}$$

Populasi pada individu Infected di kota i akan bertambah jika individu Exposed berubah menjadi individu Infected dengan laju c, dan saat individu Infected di kota i berpindah ke kota j dengan tingkat α_1. Dapat pula berkurang populasi inidvidu Infected jika adanya kematian baik alai maupun karena penyakit dengan tingkat e. Juga ketika individu Infected dari kota i berpindah ke kota j dengan tingkat α_1, maka persamaan individu Infected yang didapat:

$$\frac{dI_i}{dt} = cE_i - (e + d + \alpha_1)I_i + \alpha_1 \mathrm{I}_j \tag{4.1c}$$

Pada populasi individu Recovered. Individu Recovered dapat bertambah dengan sembuhnya individu terinfeksi dengan tingkat d, kemudian juga adanya perpindahan individu Recovered dari kota j ke kota i dengan tingkat α_1. Indivdiu Recovered dapat berkurang dengan adanya kematian alami dari individu dengan tingkat b, adanya perpindahan individu Recovered dari kota i ke kota j dengan tingkat α_1 juga adanya individu sembuh dan menjadi rentan dengan tingkat α_2. Maka persamaannya adalah sebagai berikut

$$\frac{dR_i}{dt} = dI_i - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_i + \alpha_1 R_j \tag{4.1d}$$

4.2. Model Epidemik Penyebaran Penyakit Menular Tanpa Adanya Perpindahan Individu

Tidak adanya perpindahan individu maka $\alpha_1 = 0$. Persamaannya menjadi:

$$\dot{S} = a - bs - \frac{\beta SI}{N} + \alpha_2 R \tag{4.2a}$$

$$\dot{E} = \frac{\beta SI}{N} - (b + c)E \tag{4.2b}$$

$\dot{I} = cE - (e + d)I$ (4.2c)

$\dot{R} = dI - (b + \alpha_2)R$ (4.2d)

N adalah jumlah semua populasi individu
$N = S + E + I + R$
Turunan pertama dari N
$\dot{N} = \dot{S} + \dot{E} + \dot{I} + \dot{R}$
Substitusikan persmaan (4.2)
$\dot{N} = a - bS - bE - eI - bR$
Laju kematian akibat penyakit lebih besar daripada laju kematian alami sehingga dapat ditulis $e \geq b$
$eI \geq bI$
$-eI \leq -bI$
$\dot{N} = a - bS - bE - eI - bR$
$\dot{N} \leq a - bS - bE - bI - bR$
$\dot{N} = a - (S + E + I + R)b$
$\dot{N} + b(S + E + I + R) \leq a$
$\dot{N} + bN \leq a$
$\frac{d}{dt}\left[e^{\int b\, dt} N\right] \leq ae^{\int b\, dt}$
$\frac{d}{dt}[e^{bt}N] \leq a\,.\,e^{bt}$
$e^{bt}\, N(t) \leq \int a\,.\,e^{b\, dt}$
$e^{bt}\, N(t) \leq \frac{a}{b} e^{bt} + k$
Dibagi dengan e^{bt}
$N(t) \leq \frac{a}{b} + \frac{k}{e^{bt}}$
$\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \lim\limits_{t\to\infty} \frac{a}{b} + \lim\limits_{t\to\infty} \frac{k}{e^{bt}}$
$\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{a}{b} + 0$
$\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{a}{b}$
Karena $\lim_{t\to\infty} N(t) < \frac{a}{b}$ maka $0 < N(t) \leq \frac{a}{b}$
Dapat disimpulkan bahwa model (4.2) memiliki penyelesaian terbatas dengan daerah penyelesaiannya adalah:

$Hp =$
$\left\{\{(S, E, I, R)\} \middle| S > 0; E \geq 0; I \geq 0; R \geq 0; S + E + I + R = N \leq \frac{a}{b}\right\}$

Selanjutnya mencari titik kesetimbangan
Titik kesetimbangan sistem terjadi apabila $\dot{S} = \dot{E} = \dot{I} = \dot{R} = 0$. Titik kesetimbangan pada sebuah penyakit ada dua jenis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Titik kedetimbangan bebas penyakit terjadi jika tidak ada penularan penyakit dalam populasi dengan $I = 0$

Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk. $\dot{R} = 0$

$\dot{R} = dI - (b + \alpha_2)R = 0$
$0 = dI - (b + \alpha_2)R$
Karena $I = 0$, didapat $R = 0$

Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk. $\dot{I} = 0$

$\dot{I} = cE - (e + d)I = 0$
$0 = cE - (e + d)I$
karena $I = 0$ diperoleh $E = 0$

Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk $\dot{S} = 0$
$\dot{S} = a - bS - \frac{\beta SI}{N} + \alpha_2 R = 0$
Karena $I = 0$ diperoleh $S = \frac{a}{b}$

Ttitik kesetimbangan bebas penyakit untuk persamaan (4.2) adalah $P_1(S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{a}{b}, 0,0,0\right)$

Misalkan
$\dot{S} = f_1(S, E, I, R) = a - bS - \frac{\beta SI}{S+E+I+R} + \alpha_2 R$
$\dot{E} = f_2(S, E, I, R) = \frac{\beta SI}{S+E+I+R} - (b + c)E$
$\dot{I} = f_3(S, E, I, R) = cE - (e + d)I$
$\dot{R} = f_4(S, E, I, R) = dI - (b + \alpha_2)R$

Maka matriks Jacobian untuk$P_1(\frac{a}{b}, 0,0,0)$adalah

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -b & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -(b+c) & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e+d) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(b+\alpha_2) \end{bmatrix}$$

Dicari akar persamaan karakteristik Akar persamaan karakteristik diperoleh dari $|J(P_1) - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-\lambda & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -(b+c+\lambda) & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e+d+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(b+\alpha_2+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Atau dapat ditulis sebagai

$$(b+\lambda)(b+\alpha_2+\lambda)[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2] = 0 \qquad (4.3)$$

Dengan $a_1 = (b+c+d+e)$, $a_2 = (b+c)(e+d) - \beta c$

Pada persamaan (4.3) memberikan nilai akar persamaan karakteristik

$b + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -b < 0$

$b + \alpha_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -(b+\alpha_2) < 0$

Nilai akar persamaan yang lain diperoleh dari :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (4.4)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen persamaan (4.4) memiliki bagian real negatif jika $a_1 > 0, a_2 > 0$, maka

$a_1 = (b+c+d+e) > 0$

Untuk a_2 akan positif jika

$(b+c)(e+d) - \beta c > 0$

$\frac{\beta c}{(b+c)(e+d)} < 1$

Karena $a_1\, dan\, a_2 > 0$ persamaan (4.2) mempunyai akar persamaan negatif dan titik kesetimbangan bebas penyakit ada dan stabil dengan $\frac{\beta c}{(b+c)(e+d)} < 1$.

Titik Kesetimbangan endemik

Sedangkan titik kesetimbangan endemik adalah keadaan saat penyakit menular menyebar dalam suatu populasi dan terjadi saat $I^* \neq 0$, dan diasumsikan kedua kota identik.

Titik kesetimbangan endemic untuk $\dot{R} = 0$ adalah:

$\dot{R} = dI^* - (b + \alpha_2)R^* = 0$

$I^* = \frac{(b+\alpha_2)}{d} R^*$

Titik kesetimbangan endemik untuk $\dot{I} = 0$

$\dot{I} = cE^* - (e + d)I^* = 0$

$E^* = \frac{(e+d)I^*}{c} = \frac{(b+\alpha_2)(e+d)}{cd} R^*$

Titik kesetimbangan endemic untuk $\dot{E} = 0$

$\dot{E} = \frac{\beta S^* I^*}{N^*} - (c + d)E^* = 0$

$\frac{\beta S^* I^*}{N^*} = (c + d)E^*$

$$\frac{\beta S^* I^*}{N^*} = \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R^* \qquad (4.5)$$

Titik kesetimbangan endemic untuk $\dot{S} = 0$

$\dot{S} = a - bS^* - \frac{\beta S^* I^*}{N^*} + \alpha_2 R^* = 0$

Subtitusikan (4.5)

$0 = a - bS^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R^*}{cd} + \alpha_2 R^*$

$bS^* = a - R^* \left[\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} - \alpha_2\right]$

Semua ruas dikali dengan cd menjadi

$bcd\, S^* = acd - R^*[(b + \alpha_2)(b + c)(e + d) - cd\alpha_2]$

Kedua ruas dibagi dengan bcd

$S^* = \frac{acd - R^*[(b+\alpha_2)(b+c)(e+d) - cd\alpha_2]}{bcd}$

$$S^* = \frac{acd - R^*[b^2e + be\alpha_2 + b^2d + bd\alpha_2 + bce + ce\alpha_2 + bcd + cd\alpha_2 - cd\alpha_2}{bcd}$$
$$S^* = \frac{acd - R^*[(b+\alpha_2)(be+bd+ce)+bcd]}{bcd}$$

N^* merupakan jumlah semua populasi pada keadaan endemik
$$N^* = S^* + E^* + I^* + R^*$$
$$N^* = \frac{acd - \left(b^2e + be\alpha_2 + b^2d + bd\alpha_2 + bce + ce\alpha_2 + bcd\right)R}{bcd} + \frac{(e+d)(b+\alpha_2)R}{cd} + \frac{(b+\alpha_2)R}{d} + R$$
$$N^* = \frac{acd - \left(bce + ce\alpha_2 - b^2c - bc\alpha_2\right)R}{bcd}$$
Didapat
$$N^* = \frac{a}{b} - \frac{(b+\alpha_2)(e-b)R}{bd}$$

Melakukan pelinearan persamaan (4.2)
Misalkan
$$\begin{aligned}
\dot{S} &= f_1(S,E,I,R) = a - bS - \frac{\beta SI}{S+E+I+R} + \alpha_2 R \\
\dot{E} &= f_2(S,E,I,R) = \frac{\beta SI}{S+E+I+R} - (b+c)E \\
\dot{I} &= f_3(S,E,I,R) = cE - (e+d)I \\
\dot{R} &= f_4(S,E,I,R) = dI - (b+\alpha_2)R
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Setelah melakukan pelinearan, mengkonstruksi ke dalam Jacobian.
Matriks Jacobiannya sebagai berikut
$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -b - \left(\frac{\beta I(N-S)}{N^2}\right) & \frac{\beta SI}{N^2} & -\left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right) & \frac{\beta SI}{N^2} + \alpha_2 \\ \left(\frac{\beta I(N-S)}{N^2}\right) & \frac{\beta SI}{N^2} - b - c & \left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right) & -\frac{\beta SI}{N^2} \\ 0 & c & -e-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b-\alpha_2 \end{bmatrix}$$
Dengan mengambil permisalan
$$\psi_1 = \left(\frac{\beta I^*(N^* - S^*)}{N^{*2}}\right)$$
$$\psi_2 = \frac{\beta SI}{N^2}$$
$$\psi_3 = \left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right)$$

Persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai berikut

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -b-\psi_1 & \psi_2 & -\psi_3 & \psi_2+\alpha_2 \\ \psi_1 & -\psi_2-b-c & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 & c & -e-d & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Akar-akar persamaan karakteristik didapat dari

$$|J(P_2) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -b-\psi_1-\lambda & \psi_2 & -\psi_3 & \psi_2+\alpha_2 \\ \psi_1 & \psi_2-b-c-\lambda & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 & c & -e-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari melakukan perhitungan diperoleh:

$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4\lambda^0 = 0$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk memudahkan menunjukkan kestabilan sistem dengan melihat koefisien $\lambda^4, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^1$dan konstanta dari persamaan karakteristiktanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Tabel 4.1 Tabel Routh Hurwitz

λ^4	A_0	A_2	A_4	0
λ^3	A_1	A_3	0	0
λ^2	B_1	A_4	0	0
λ^1	C_1	0	0	0
λ^0	D_1	0	0	0

Dengan:

$B_1 = \frac{A_1A_2 - A_0A_3}{A_1} = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$

$B_2 = \frac{A_1A_4 - A_0A_5}{A_1} = A_4$

$B_3 = \frac{A_1A_6 - A_0A_7}{A_1} = 0$

$B_4 = \frac{A_1A_8 - A_0A_9}{A_1} = 0$

$C_1 = \frac{A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4}{A_1A_2 - A_3}$

$C_2 = \frac{B_1A_5 - A_1B_3}{B_1} = 0$

$C_3 = \frac{B_1A_7 - A_1B_4}{B_1} = 0$

$D_1 = \frac{C_1B_2 - B_1C_2}{B_1} = A_4$

$D_2 = \frac{C_1B_3 - B_1C_3}{C_1} = 0$

$D_3 = \frac{C_1B_4 - B_1C_4}{C_1} = 0$

$D_4 = \frac{C_1B_5 - B_1C_5}{C_1} = 0$

Titik kesetimbangan bisa dikatakan stabil atau memiliki akar persamaan karakteristik dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $A_0 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$

Akan dibuktikan bahwa $A_0 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$

Untuk A_0

$A_0 = 1 > 0$

Untuk pembuktian $A_1 > 0$,

$A_1 = (b + \varphi_1 + b + \alpha_2 + e + d + \varphi_2 + b + c) > 0$

Untuk analisis A_2

$A_2 = (b + c + \psi_2)(b + \alpha_2) + (b + \alpha_2 + b + \psi_1)(\psi_2 + b + c + e + d) + (b + \alpha_2)(b + \psi_1) - \varphi_1\varphi_2 - c\varphi_3$

$A_2 = (b + c + \psi_2)(b + \alpha_2) + (b + \alpha_2 + b + \psi_1)(\psi_2 + b + c + e + d) + (b + \alpha_2)(b + \psi_1) + \varphi_1\varphi_2 > 0$

Analisis A_3 sebagai berikut

$A_3 = (b + c + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2 + b + \varphi_1)$
$+(b + \alpha_2)(b + \varphi_1)(b + c + \varphi_2 + e + d) - c\varphi_3(b + \alpha_2 + b + \varphi_1) + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) + c\psi_1\psi_3$

$A_3 = (b + c + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2 + b + \varphi_1) + (b + \alpha_2)(b + \varphi_1)(b + c + \varphi_2 + e + d) - c\varphi_3(b + \alpha_2 + b) - c\varphi_3\varphi_1 + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) + c\psi_1\psi_3$

$A_3 = (b + c + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2 + b + \varphi_1) +$

$(b+\alpha_2)(b+\varphi_1)(b+c+\varphi_2+e+d)-c\varphi_3(b+\alpha_2+b)-\psi_1\psi_2(b+\alpha_2+e+d)>0$

Pembuktian $A_4>0$

$A_4=(\mathrm{b}+\alpha_2)(\mathrm{b}+\psi_1)(\psi_2+\mathrm{b}+\mathrm{c})(\mathrm{e}+\mathrm{d})(\mathrm{b}+\alpha_2)-\varphi_3(\mathrm{b}+\alpha_2)(\mathrm{b}+\varphi_1)-\psi_1\psi_2(b+\alpha_2)(e+d)+c\varphi_1\varphi_3(b+\alpha_2)-cd\varphi_1\varphi_2>0$

Untuk analisis $B_1=\frac{A_1A_2-A_3}{A_1}$

$B_1>0$ jika $A_1A_2-A_3>0$ dan $A_1>0$.

$A_1A_2-A_3=$
$(b+\alpha_2)(e+d)(b+\alpha_2+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\alpha_2+e)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\alpha_2+e)\psi_2+d(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+b)d\psi_2+c(b+\alpha_2+e)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+c\psi_2(b+\alpha_2+e)+cd(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+\psi_1\psi_2(b+\psi_2+c+e+d)>0$

Sedangkan pembuktian$C_1=\frac{A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4}{A_1A_2-A_3}>0$

Akan dibuktikan jika $A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4>0$

$A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4=(A_1A_2-A_3)A_3-A_1^2A_4$

$\Leftrightarrow[(b+\alpha_2)(e+d)(b+\alpha_2+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\alpha_2+e)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\alpha_2+e)\psi_2+d(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+b)d\psi_2+c(b+\alpha_2+e)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+c\psi_2(b+\alpha_2+e)+cd(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+\psi_1\psi_2(b+\psi_2+c+e+d)]$
$[(b+c+\psi_2)(e+d)(b+\alpha_2+b+\varphi_1)+(b+\alpha_2)(b+\varphi_1)(b+c+\varphi_2+e+d)-c\varphi_3(b+\alpha_2+b)-\psi_1\psi_2(b+\alpha_2+e+d)]-$
$[b+\varphi_1+b+\alpha_2+e+d+\varphi_2+b+c]^2[(\mathrm{b}+\alpha_2)(\mathrm{b}+\psi_1)(\psi_2+\mathrm{b}+\mathrm{c})(\mathrm{e}+\mathrm{d})(\mathrm{b}+\alpha_2)-\varphi_3(\mathrm{b}+\alpha_2)(\mathrm{b}+\varphi_1)-\psi_1\psi_2(b+\alpha_2)(e+d)+c\varphi_1\varphi_3(b+\alpha_2)-cd\varphi_1\varphi_2]>0$

Karena $D_1 = \frac{C_1 B_2 - B_1 C_2}{C_1} = A_4$maka $D_1 > 0$

Dari hasil analisis di atas, dibuktikan bahwa $A_0 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$ mempunyai kesimpulan bahwa titik kesetimbangan endemik mempunyai akar persamaan karakteristik yang bernilai negatif dan stabil.

Hasil Simulasi

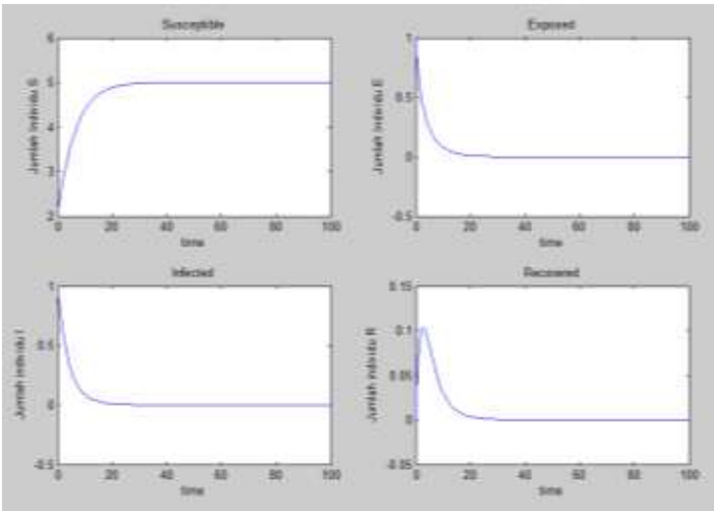
Dengan mengambil parameter:

$a = 1$, $b = 0.2$, $c = 0.3$, $d = 0.1$, $e = 0.4$, $\alpha_2 = 0.03$

Dengan nilai awal $t = 0$,

$(S(0), E(0), I(0), R(0)) = (2{,}1{,}1{,}0)$

a. Dengan mengambil $\beta = 0.6$ didapat bilangan reproduksi 0,72. Karena bilangan reproduksi kurang dari satu menunjukkan bahwa adanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. Dan hasil simulasinya sebagai berikut



Gambar 4.2 Gambar Grafik Kestabilan Tanpa Adanya Individu Yang Berpindah

Laju pertumbuhan inivdidu Susceptible

Pada awal laju pertumbuhan, individu *Susceptible* mengalami kenaikan karena individu *Recovered* sembuh dan menjadi individu Susceptible kemudian konstan karena individu *Exposed* menjadi individu *Infected.*

Laju pertumbuhan individu *Exposed*

Laju pertumbuhannya mengalami penurunan karena individu *Exposed* menjadi individu *Infected* kemudian konstan karena adanya individu Susceptible menjadi individu *Exposed*.

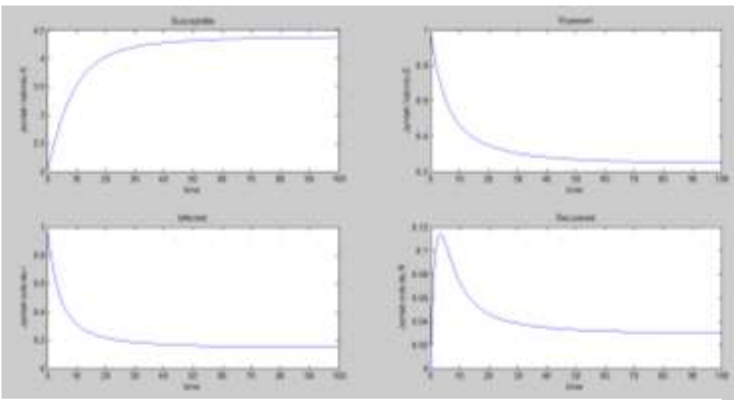
Laju pertumbuhan individu *Infected*

Laju pertumbuhan mengalami penurunan karena individu *Infected* menjadi sembuh kemudian konstan seiring adanya perubahan individu *Exposed* menjadi *Recoverd.*

Laju pertumbuhan individu *Recovered*

Laju pertumbuhan individu mula-mula mengalami kenaikan karena individu *Infected* sembuh kemudian terjadi penurunan karena individu yang sudah sembuh menjadi rentan kembali.

b. Dengan mengambil $\beta = 0.95$ didapat bilangan reproduksi 1,14. Karena bilangan reproduksi yang didapat lebih dari satu maka terdapat titik kesetimbangan endemic yang stabil. Hasil simulasinya sebagai berikut



Gambar 4.3 Gambar Grafik Kestabilan Tanpa Adanya Individu Yang Berpindah

Laju pertumbuhan inivdidu Susceptible
Pada awal laju pertumbuhan, individu *Susceptible* mengalami kenaikan karena individu *Recovered* sembuh dan menjadi individu Susceptible kemudian konstan karena individu *Exposed* menjadi individu *Infected.*
Laju pertumbuhan individu *Exposed*
Laju pertumbuhannya mengalami penurunan karena individu *Exposed* menjadi individu *Infected* kemudian konstan karena adanya individu Susceptible menjadi individu *Exposed*.
Laju pertumbuhan individu *Infected*
Laju pertumbuhan mengalami penurunan karena individu *Infected* menjadi sembuh kemudian konstan seiring adanya perubahan individu *Exposed* menjadi *Recoverd.*
Laju pertumbuhan individu *Recovered*
Laju pertumbuhan individu mula-mula mengalami kenaikan karena individu *Infected* sembuh kemudian terjadi penurunan karena individu yang sudah sembuh menjadi rentan kembali.

4.3. Model Epidemik Penyebaran Penyakit Menular dengan Individu *Susceptible* dan *Exposed* yang Berpindah

Pada tahap ini hanya individu *Susceptible* dan *Exposed* yang berpindah maka tidak ada penularan yang terjadi sehingga pada persamaan (4.7) bagian $\dot{I}$ dan $\dot{R}$ nilai $\alpha_1 = \gamma = 0$,persamaannya

$$\dot{S}_1 = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 \tag{4.7a}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_1 + \alpha_1 E_2 \tag{4.7b}$$

$$\dot{E}_1 = cE_1 - (e + d)I_1 \tag{4.7c}$$

$$\dot{R}_1 = dI_1 - (b + \alpha_2)R_1 \tag{4.7d}$$

$$\dot{S}_2 = a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 \tag{4.7e}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - (b + c + \alpha_1)E_2 + \alpha_1 E_1 \tag{4.7f}$$

$$\dot{E}_2 = cE_2 - (e + d)I_2 \tag{4.7g}$$

$$\dot{R}_2 = dI_2 - (b + \alpha_2)R_2 \tag{4.7h}$$

N merupakan jumlah semua populasi individu

$$N = S_1 + E_1 + I_1 + R_1 + S_2 + E_2 + I_2 + R_2$$

Turunan pertama dari N sebagai berikut

$$\dot{N} = \dot{S}_1 + \dot{E}_1 + \dot{I}_1 + \dot{R}_1 + \dot{S}_2 + \dot{E}_2 + \dot{I}_2 + \dot{R}_2$$

Substitusikan persamaan (4.7)

$$\dot{N} = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 + \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_1 + \alpha_1 E_2 + cE_1 - (e + d)I_1 + dI_1 - (b + \alpha_2)R_1 + a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 + \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - (b + c + \alpha_1)E_2 + \alpha_1 E_1 + cE_2 - (e + d)I_2 + dI_2 - (b + \alpha_2)R_2$$

$$\dot{N} = 2a - bS_1 - bE_1 - eI_1 - bR_1 - bS_2 - bE_2 - eI_2 - bR_2$$

Diperoleh

$$\dot{N} = 2a - b(S_1 + E_1 + R_1 + S_2 + E_2 + R_2) - e(I_1 + I_2)$$

Banyaknya individu yang meninggal karena penyakit maupun alami lebih banyak dari individu yang meninggal secara alami maka dapat ditulis $e \geq b$.

Kalikan kedua ruas dengan $(I_1 + I_2)$

$$e(I_1 + I_2) \geq b(I_1 + I_2)$$

Kalikan kedua ruas dengan negatif

$-e(I_1 + I_2) \leq -b(I_1 + I_2)$

$\dot{N} \leq 2a - b(S_1 + E_1 + R_1 + S_2 + E_2 + R_2) - b(I_1 + I_2)$

$\dot{N} \leq 2a - b(S_1 + E_1 + I_1 + R_1 + S_2 + E_2 + I_2 + R_2)$

$\dot{N} \leq 2a - bN$

$\dot{N} + bN \leq 2a$

$\frac{d}{dt}\left[N \, . \, e^{\int b \, dt}\right] \leq 2a \, e^{\int b \, dt}$

$e^{bt} \, . \, N \leq \int 2a \, e^{bt} \, dt$

$e^{bt} . N \leq \frac{2a}{b} e^{bt} + k$

$N \leq \frac{2a}{b} + k . e^{-bt}$ dengan k adalah konstanta positif

$\lim_{t \to \infty} N(t) \leq \lim_{t \to \infty} \frac{2a}{b} + \lim_{t \to \infty} k . e^{-bt}$

$\lim_{t \to \infty} N(t) \leq \frac{2a}{b}$

Karena $\lim_{t \to \infty} N(t) \leq \frac{2a}{b}$

Maka $0 < N(t) \leq \frac{2a}{b}$

Dapat disimpulkan:

$S = \left\{ (S_1, E_1, R_1, S_2, E_2, I_2, R_2) / S_1 > 0; E_1 > 0; I_1 > 0; R_1 > 0; S_2 > 0; E_2 > 0 \, ; I_2 > 0; R_2 > 0; S_1 + E_1 + I_1 + R_1 + S_2 + E_2 + I_2 + R_2 = N = \frac{2a}{b} \right\}$

Titik Kesetimbangan

Dicari Titik kesetimbangan dengan syarat $\dot{S}_i = \dot{E}_i = \dot{I}_i = \dot{R}_i = 0$ dengan $i = 1,2$. Mula-mula mencari titik kesetimbangan bebas penyakit di masing-masing kota. Karena bebas penyakit, maka tidak ada individu yang dapat menularkan sehingga $I_1 = 0\ dan\ I_2 = 0$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit dikota 1 untuk $\dot{R}_1 = 0$

$$\dot{R}_1 = dI_1 - (b + \alpha_2)R_1 = 0$$

Tidak terjadi penularan di kota 1 yang berarti $I_1 = 0$ sehingga didapat $R_1 = 0$

Titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 1 untuk individu Exposed

$$\dot{E}_1 = cE_1 - (e + d)I_1 = 0$$

Karena tidak ada penularan, berarti $I_1 = 0$ sehingga didapat

$$E_1 = 0$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 1 untuk individu Susceptible

$$\dot{S}_1 = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 = 0$$

Melakukan substitusi $E_1 = 0,\ I_1 = 0,\ R_1 = 0$ sehingga diperoleh

$$0 = a - bS_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2$$

$$a = bS_1 + \alpha_1 S_1 - \alpha_1 S_2 \tag{4.8}$$

Titik kesetimbangan endemik di kota 2 untuk individu Recovered $\dot{R}_2 = 0$

$$\dot{R}_2 = dI_2 - (b + \alpha_2)R_2 = 0$$

Karena tidak ada individu terinfeksi yang menularkan penyakit maka $I_2 = 0$ dan didapat $R_2 = 0$.

Titik kesetimbangan individu Exposed dengan $\dot{E}_2 = 0$

$\dot{E}_2 = cE_2 - (e + d)I_2 = 0$

Karena $I_2 = 0$ didapat $E_2 = 0$

Titik kesetimbangan endemik untuk individu Susceptible di kota 2.

$\dot{S}_2 = a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 = 0$

Substitusikan , $E_2 = 0$ $I_2 = 0$, $R_2 = 0$ diperoleh

$0 = a - bS_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1$

$a = bS_2 + \alpha_1 S_2 - \alpha_1 S_1$ (4.9)

Persamaan (4.8) = (4.9)

$bS_1 + \alpha_1 S_1 - \alpha_1 S_2 = bS_2 + \alpha_1 S_2 - \alpha_1 S_1$

$S_1(b + 2\alpha_1) = S_2(b + 2\alpha_1)$

$S_1 = S_2$ (4.10)

Substitusi (4.10) ke (4.8)

$a = bS_1 + \alpha_1 S_1 - \alpha_1 S_2$

$a = bS_1 + \alpha_1 S_1 - \alpha_1 S_1$

$S_1 = \frac{a}{b}, S_2 = \frac{a}{b}$

Titik kesetimbangann bebas penyakit pada kedua kota $P_1(\frac{a}{b}, 0,0,0, \frac{a}{b}, 0,0,0)$

Selanjutnya melakukan pelinearan dan diperoleh matriks Jacobian untuk P_1 adalah

$J(P_1) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

Dengan

$$A = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1-\psi_1 & -\psi_2 & -\psi_3 & \psi_2+\alpha_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 & c & -e-d & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Akar persamaan karakteristik diperoleh dari

$\det(J(P_1) - \lambda I) = 0$

$det \begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = 0$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi diperoleh

$\det(J(P_1) - \lambda I) = \det(A + B - \lambda I)\det(A - B - \lambda I) = 0$

Nilai eigen dari $J(P_1)$ dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari $(A - B)$ dan $(A + B)$

Pandang matriks $(A - B)$

$$A - B = \begin{pmatrix} -b-2\alpha_1 & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -b-c-2\alpha_1 & \beta & 0 \\ 0 & c & -e-d & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Akar persamaan karakteristik untuk $\det(A - B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-2\alpha_1-\lambda & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -b-c-2\alpha_1-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & c & -e-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bisa juga ditulis sebagai berikut

$$(b+2\alpha_1+\lambda)(b+\alpha_2+\lambda)[\lambda^2+a_1\lambda+a_2]=0 \qquad (4.11)$$

Dengan

$$a_1=(b+c+2\alpha_1+e+d)$$

$$a_2=(b+c+2\alpha_1)(e+d)-\beta c$$

Oleh karena itu nilai eigen dari persamaan (4.11) adalah

$$(b+2\alpha_1+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=-(b+2\alpha_1)<0$$

$$(b+\alpha_2+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_2=-(b+\alpha_2)<0$$

Agar persamaan (4.11) mempunyai akar persamaan yang real negatif menurut kriteria Routh-Hurwitz haruslah $a_1>0$, $a_2>0$

$$a_1=(b+c+2\alpha_1+e+d)>0$$

$$a_2=(b+c+2\alpha_1)(e+d)-\beta c>0$$

$$\frac{\beta c}{(b+c+2\alpha_1)(e+d)}<1$$

Dari hasil penjabaran diketahui bahwa persamaan (4.11) mempunyai akar persamaan yang real negatif.

Selanjutnya pandang matriks

$$A+B=\begin{pmatrix} -b & 0 & \beta & \alpha_2 \\ 0 & -b-c & -\beta & 0 \\ 0 & c & -e-d & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\det(A + B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-\lambda & 0 & \beta & \alpha_2 \\ 0 & -b-c-\lambda & -\beta & 0 \\ 0 & c & -e-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(b + \lambda)(b + \alpha_2 + \lambda)[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2] = 0$

Dengan $a_1 = (b + c + e + d), \quad a_2 = (b + c)(e + d) - \beta c$

Akar-akar persamaan karakteristik yang diperoleh

$(b + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -b < 0$

$(b + \alpha_2 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -(b + \alpha_2) < 0$

Supaya mempunyai akar persmaan yang negatif menurut kriteria Routh-Hurwitz, maka haruslah $a_1 > 0, a_2 > 0$

$a_1 = (b + c + e + d) > 0$

$a_2 = (b + c)(e + d) - \beta c > 0$

$\frac{\beta c}{(b+c)(e+d)} < 1$

Dari hasil $\det(A - B - \lambda I) = 0$ dan $\det(A + B - \lambda I) = 0$ diketahui bahwa persamaan (4.12) mempunyai akar persamaan yang bernilai negatif sehingga terbukti kestabilannya dengan $\frac{\beta c}{(b+c)(e+d)} < 1$. Keadaan $\frac{\beta c}{(b+c)(e+d)} < 1$ menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit ada dan stabil.

<u>Titik kesetimbangan endemik</u>

Keadaan endemik dapat terjadi apabila individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit $I_1^* \neq 0, I_2^* \neq 0$. Dicari titik kesetimbanngan endemik di kedua kota.

Titik kesetimbangan endemik di kota 1

a. Untuk $\dot{R}_1 = 0$

$\dot{R}_1 = dI^* - (b + \alpha_2)R_1^* = 0$ diperoleh

$$I_1^* = \frac{(b+\alpha_2)}{d} R_1^* \quad (4.12)$$

b. Untuk $\dot{I}_1 = 0$

$\dot{I}_1 = cE_1^* - (e + d)I_1^* = 0$ diperoleh titik kesetimbangan endemik

$E_1^* = \frac{(e+d)I_1^*}{c}$. Substitusikan (4.12) menjadi

$$E_1^* = \frac{(e+d)(b+\alpha_2)R_1^*}{cd} \quad (4.13)$$

c. Untuk $\dot{E}_1 = 0$

$$\dot{E}_1 = \frac{\beta S^* I_1^*}{N^*} - (c + d)E_1^* = 0$$

$\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} = (c + d)E_1^*$. Substitusikan (4.13)

$$\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} = \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_1^* \quad (4.14)$$

d. Untuk $\dot{S}_1 = 0$

$$\dot{S}_1 = a - bS_1^* - \frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} - \alpha_2 R_1^* - \alpha_1 S_1^* + \alpha_1 S_2^* = 0$$

$\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} = a - bS_1^* + \alpha_2 R_1^* - \alpha_1 S_1^* + \alpha_1 S_2^*$. Substitusikan (4.14) menjadi

$$\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_1^* = a + \alpha_2 R_1^* - (b + \alpha_1)S_1^* + \alpha_1 S_2^*$$

$$(b + \alpha_1)S_1^* = a + \alpha_2 R_1^* + \alpha_1 S_2^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_1^*$$

$$S_1^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)} \left[a + \alpha_2 R_1^* + \alpha_1 S_2^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_1^*}{cd} \right] \quad (4.15)$$

Titik kesetimbangan endemik di kota 2

a. Untuk $\dot{R}_2 = 0$

$\dot{R}_2 = dI_1^* - (b + \alpha_2)R_2^* = 0$ diperoleh

$$I_2^* = \frac{(b+\alpha_2)}{d} R_2^* \qquad (4.16)$$

b. Untuk $\dot{I}_2 = 0$

$\dot{I}_2 = cE_2^* - (e + d)I_2^* = 0$ didapat

$E_2^* = \frac{(e+d)I_2^*}{c}$. Substitusikan (4.16) menjadi

$$E_2^* = \frac{(e+d)(b+\alpha_2)}{cd} R_2^* \qquad (4.17)$$

c. Untuk $\dot{E}_2 = 0$

$$\dot{E}_2 = \frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} - (c + d)E_2^* = 0$$

$\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} = (c + d)E_2^*$. Substitusikan (4.17) sehingga

$$\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} = \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_1^* \qquad (4.18)$$

d. Untuk $\dot{S}_2 = 0$

$$\dot{S}_2 = a - bS_2^* - \frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} - \alpha_2 R_2^* - \alpha_1 S_2^* + \alpha_1 S_1^* = 0$$

$$\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} = a - bS_2^* + \alpha_2 R_2^* - \alpha_1 S_2^* + \alpha_1 S_1^*$$

Substitusikan (4.18) sehingga persamaan menjadi

$$\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_2^* = a + \alpha_2 R_2^* - (b + \alpha_1)S_2^* + \alpha_1 S_1^*$$

$$(b + \alpha_1)S_2^* = a + \alpha_2 R_2^* + \alpha_1 S_1^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_2^*$$

$$S_2^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}\left[a + \alpha_2 R_2^* + \alpha_1 S_1^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right] \qquad (4.19)$$

Substitusi persamaan (4.19) ke (4.15) diperoleh

$$S_1^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}\left\{a+\alpha_2R_1^*+\alpha_1\left[\frac{1}{(b+\alpha_1)}\left(a+\alpha_2R_2^*+\alpha_1S_1^*-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right)\right]-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_1^*}{cd}\right\}$$

sehingga

$$S_1^* = \frac{(b+\alpha_1)}{b(b+2\alpha_1)}\left\{a+\alpha_2R_1^*+\alpha_1\left[\frac{1}{(b+\alpha_1)}\left(a+\alpha_2R_2^*-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right)\right]-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd}R_1^*\right\} \quad (4.20)$$

Sub pers (4.20) ke (4.19) menjadi

$$S_2^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}\left\{a+\alpha_2R_2^*+\alpha_1\frac{(b+\alpha_1)}{b(b+2\alpha_1)}\left[a+\alpha_2R_1^*+\alpha_1\left(\frac{1}{(b+\alpha_1)}\left(a+\alpha_2R_2^*-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right)\right)-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_1^*}{cd}\right]-\frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right\}$$

Maka titik kesetimbangan endemik di kedua kota dengan hanya individu Susceptible dan Exposed yang berpindah $P_2(S_{1,}^*E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$

Matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan endemik P_2 adalah

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Dengan :

$$A = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1-\psi_1 & \psi_2 & -\psi_3 & \psi_2+\alpha_2 \\ \psi_1 & -\psi_2 & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 & c & -e-d & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan :

$\psi_1 = \left(\frac{\beta I^*(N^*-S^*)}{{N^*}^2}\right)$

$\psi_2 = \frac{\beta SI}{N^2}$

$\psi_3 = \left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right)$

Nilai eigen didapat dari $\det(J(P_2) - \lambda I) = 0$

$$det\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ B & A - \lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi diperoleh

$$\det(J(P_2) - \lambda I) = det(A - B - \lambda I)\det(A + B - \lambda I) = 0$$

Nilai eigen $J(P_2)$ dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari matrik $A - B$ dan $A + B$

Pertama, Pandang matriks $A + B$

$$\det(A + B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -b - \psi_1 - \lambda & \psi_2 & -\psi_3 & \psi_2 + \alpha_2 \\ \psi_1 & -b - c - \psi_2 - \lambda & \psi_3 & \psi_2 \\ 0 & c & -e - d - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -b - \alpha_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari $\det(A + B - \lambda I)$ adalah

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4\lambda^0 = 0$$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk memudahkan menunjukkan kestabilan sistem dengan melihat koefisien $\lambda^4, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^1, \lambda^0$ dan konstanta dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Tabel 4.2 Tabel Routh Hurwitz

λ^4	A_0	A_2	A_4	0
λ^3	A_1	A_3	0	0
λ^2	B_1	A_4	0	0
λ^1	C_1	0	0	0
λ^0	D_1	0	0	0

$A_0 = 1$

$B_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$

$B_2 = \frac{A_1A_4 - A_0A_5}{A_1} = A_4$

$B_3 = \frac{A_1A_6 - A_0A_7}{A_1} = 0$

$B_4 = \frac{A_1A_8 - A_0A_9}{A_1} = 0$

$C_1 = \frac{A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4}{A_1A_2 - A_3}$

$C_2 = \frac{B_1A_5 - A_1B_3}{B_1} = 0$

$C_3 = \frac{B_1A_7 - A_1B_4}{B_1} = 0$

$D_1 = \frac{C_1B_2 - B_1C_2}{B_1} = A_4$

$D_2 = \frac{C_1B_3 - B_1C_3}{C_1} = 0$

$D_3 = \frac{C_1B_4 - B_1C_4}{C_1} = 0$

$D_4 = \frac{C_1B_5 - B_1C_5}{C_1} = 0$

Titik kesetimbangan dikatakan stabil atau memiliki nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika$A_0 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$

Akan dibuktikan bahwa $A_0 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$

Jelas bahwa $A_0 = 1 > 0$

Jelas diketahui bahwa

$A_1 = (b + \varphi_1 + b + \alpha_2 + e + d + \varphi_2 + b + c) > 0$

Analisis untuk A_2 adalah

$A_2 = (b + c + \psi_2)(b + \alpha_2) + (b + \alpha_2 + b + \psi_1)$
$(\psi_2 + b + c + e + d) + (b + \alpha_2)(b + \psi_1) - \varphi_1\varphi_2 - c\varphi_3$

$A_2 = (b + c + \psi_2)(b + \alpha_2) + (b + \alpha_2 + b + \psi_1)$

$(\psi_2 + b + c + e + d) + (b + \alpha_2)(b + \psi_1) + \varphi_1\varphi_2 > 0$

Hasil analisis untukA_3 sebagai berikut
$A_3 = (b + c + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2 + b + \varphi_1)$
$+(b + \alpha_2)(b + \varphi_1)(b + c + \varphi_2 + e + d) -$
$c\varphi_3(b + \alpha_2 + b + \varphi_1) + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) + c\psi_1\psi_3$

$A_3 = (b + c + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2 + b + \varphi_1) +$
$(b + \alpha_2)(b + \varphi_1)(b + c + \varphi_2 + e + d) -$
$c\varphi_3(b + \alpha_2 + b) - c\varphi_3\varphi_1 + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) +$
$c\psi_1\psi_3$

$A_3 = (b + c + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2 + b + \varphi_1) +$
$(b + \alpha_2)(b + \varphi_1)(b + c + \varphi_2 + e + d) - c\varphi_3(b + \alpha_2 +$
$b) - \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) > 0$

Untuk A_4 analisisnya sebagai berikut:
$A_4 = (\mathrm{b} + \alpha_2)(\mathrm{b} + \psi_1)(\psi_2 + \mathrm{b} + \mathrm{c})(\mathrm{e} + \mathrm{d})(\mathrm{b} + \alpha_2) -$
$\varphi_3(\mathrm{b} + \alpha_2)(\mathrm{b} + \varphi_1) - \psi_1\psi_2(b + \alpha_2)(e + d) +$
$c\varphi_1\varphi_3(b + \alpha_2) - cd\varphi_1\varphi_2 > 0$

Untuk analisis B_1
Supaya $B_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1} > 0$ haruslah $A_1A_2 - A_3 > 0$ dan $A_1 > 0$. Dari penjabaran, jelas dilihat bahwa $A_1 > 0$.
$A_1A_2 - A_3 =$
$(b + \alpha_2)(e + d)(b + \alpha_2 + e + d) + (b + \psi_1 + \psi_2 + b)(b +$
$\alpha_2 + e)(b + \psi_1 + b + \alpha_2 + b + c + e + d) + (b + \psi_1 +$
$\psi_2 + b)(b + \alpha_2 + e)\psi_2 + d(b + \psi_1 + \psi_2 + b)(b + \psi_1 +$
$b + \alpha_2 + b + c + e + d) + (b + \psi_1 + \psi_2 + b)d\psi_2 +$
$c(b + \alpha_2 + e)(b + \psi_1 + b + \alpha_2 + b + c + e + d) +$
$c\psi_2(b + \alpha_2 + e) + cd(b + \psi_1 + b + \alpha_2 + b + c + e + d) +$
$\psi_1\psi_2(b + \psi_2 + c + e + d) > 0$

Pembuktian untuk $C_1 > 0$
$C_1 = \frac{A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4}{A_1A_2 - A_3}$

$A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 = (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2A_4$
$\Leftrightarrow [(b+\alpha_2)(e+d)(b+\alpha_2+e+d) + (b+\psi_1+\psi_2+$
$b)(b+\alpha_2+e)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+$
$(b+\psi_1+\psi_2+b)(b+\alpha_2+e)\psi_2 + d(b+\psi_1+\psi_2+$
$b)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+d)+(b+\psi_1+\psi_2+$
$b)d\psi_2 + c(b+\alpha_2+e)(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+$
$d)+c\psi_2(b+\alpha_2+e)+cd(b+\psi_1+b+\alpha_2+b+c+e+$
$d)+\psi_1\psi_2(b+\psi_2+c+e+d)]$
$[(b+c+\psi_2)(e+d)(b+\alpha_2+b+\varphi_1)+(b+\alpha_2)(b+$
$\varphi_1)(b+c+\varphi_2+e+d)-c\varphi_3(b+\alpha_2+b)-$
$\psi_1\psi_2(b+\alpha_2+e+d)]-$
$[b+\varphi_1+b+\alpha_2+e+d+\varphi_2+b+c]^2[(\mathrm{b}+\alpha_2)(\mathrm{b}+$
$\psi_1)(\psi_2+\mathrm{b}+\mathrm{c})(\mathrm{e}+\mathrm{d})(\mathrm{b}+\alpha_2)-\varphi_3(\mathrm{b}+\alpha_2)(\mathrm{b}+\varphi_1)-$
$\psi_1\psi_2(b+\alpha_2)(e+d)+c\varphi_1\varphi_3(b+\alpha_2)-cd\varphi_1\varphi_2] > 0$

Karena $D_1 = A_4$ telah terbukti bahwa $D_1 > 0$
Dari hasil analisis di atas, dapat dibuktikan bahwa $A_0 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$

Kedua pandang matriks $A - B$

$\det(A-B) =$

$$\begin{vmatrix} -b-2\alpha_1-\psi_1-\lambda & \psi_2 & -\psi_3 & \psi_2+\alpha_2 \\ \psi_1 & -b-c-2\alpha_1-\psi_2-\lambda & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 & c & -e-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh $A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4 = 0$

Agar koefisien-koefisien dari akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif maka harus dibuktikan bahwa koefisien-koefisiennya bernilai positif menurut kriteria Routh-Hurwitz. Pembuktiannya :

Jelas bahwa $A_0 = 1 > 0$

Penjabaran A_1

$A_1 = b + \alpha_2 + e + d + b + 2\alpha_1 + \psi_1 + b + c + 2\alpha_1 + \psi_2 > 0$

Pembuktian $A_2 > 0$

$A_2 = (b + \alpha_2)(e + d)(b + \psi_1 + 2\alpha_1 + b + c + \psi_2 + 2\alpha_1) + (b + \psi_1 + 2\alpha_1)(b + c + \psi_2 + 2\alpha_1)(b + \alpha_2 + e + d) - c\psi_3(b + \psi_1 + 2\alpha_1 + b + \alpha_2) + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) + c\psi_1\psi_3 > 0$

Pembuktian $A_3 > 0$

$A_3 = (b + \alpha_2)(e + d)(b + c + 2\alpha_1 + \psi_2 + b + 2\alpha_1 + \psi_1) + (b + 2\alpha_1 + \psi_1)(b + c + 2\alpha_1 + \psi_2)(b + \alpha_2 + e + d) + c\psi_1\psi_3 + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) - c\psi_3(b + \alpha_2 + b + 2\alpha_1 + \psi_1)$

$A_3 = (b + \alpha_2)(e + d)(b + c + 2\alpha_1 + \psi_2 + b + 2\alpha_1 + \psi_1) + (b + 2\alpha_1 + \psi_1)(b + c + 2\alpha_1 + \psi_2)(b + \alpha_2 + e + d) + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2 + e + d) - c\psi_3(b + \alpha_2 + b + 2\alpha_1 > 0$

Untuk A_4

$A_4 = (b + 2\alpha_1 + \psi_1)(b + c + 2\alpha_1 + \psi_2)(e + d)(b + \alpha_2) + cd\psi_2(b + 2\alpha_1 + \psi_1) + \psi_1\psi_2(b + \alpha_2)(e + d) + c\psi_1\psi_2(b + \alpha_2) + cd\psi_1(\psi_2 + \alpha_2) - c\psi_3(b + \alpha_2)(b + 2\alpha_1 + \psi_1) > 0$

Hasil analisis $B_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$

Agar $B_1 > 0$ harus dibutikan bahwa $A_1A_2 - A_3 > 0$ dan $A_1 > 0$. Dari hasil uraian di atas, telah terbukti bahwa $A_1 > 0$

Kemudian $A_1A_2 - A_3 = (b + \alpha_2)(e + d) + (b + \psi_1 + 2\alpha_1 + b + c + 2\alpha_1 + e + d + b + \alpha_2)[(b + 2\alpha_1 + \psi_1 + b + c + 2\alpha_1 + \psi_2)(b + \alpha_2 + e) + d(b + 2\alpha_1 + \psi_1 + b + 2\alpha_1 + \psi_2) + c(b + \alpha_2 + e)] +$

$\psi_2[(b+\psi_1+2\alpha_1+b+\psi_2+2\alpha_1)(b+\alpha_2+e)+$
$d(b+\psi_1+2\alpha_1+b+\psi_2+2\alpha_1)+c(b+e+\alpha_2)]+$
$cd(b+\psi_1+2\alpha_1+b+\psi_2+2\alpha_1+c+e+d+b+\alpha_2)-$
$\psi_1\psi_2(b+c+2\alpha_1+\psi_2+e+d)>0$

Agar $C_1=\frac{A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4}{A_1A_2-A_3}>0$
Dibuktikan bahwa $A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4>0$ dan $A_1A_2-A_3>0$.
Dari penjabaran di atas telah dibuktikan bahwa
$A_1A_2-A_3>0$.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4>0$.
$A_1A_2A_3-A_3^2-A_1^2A_4=(A_1A_2-A_3)A_3-A_1^2A_4=$
$\{[(b+\alpha_2)(e+d)+(b+\psi_1+2\alpha_1+b+c+2\alpha_1+e+$
$d+b+\alpha_2)][(b+2\alpha_1+\psi_1+\ b+c+2\alpha_1+\psi_2)(b+\alpha_2+$
$e)+d(b+2\alpha_1+\psi_1+b+2\alpha_1+\psi_2)+c(b+\alpha_2+e)]+$
$+\psi_2[(b+\psi_1+2\alpha_1+b+\psi_2+2\alpha_1)(b+\alpha_2+e)+$
$d(b+\psi_1+2\alpha_1+b+\psi_2+2\alpha_1)+c(b+e+\alpha_2)]+$
$cd(b+\psi_1+2\alpha_1+b+\psi_2+2\alpha_1+c+e+d+b+\alpha_2)-$
$\psi_1\psi_2(b+c+2\alpha_1+\psi_2+e+d)]\}$
$[(b+\alpha_2)(e+d)(b+c+2\alpha_1+\psi_2+b+2\alpha_1+\psi_1)+$
$(b+2\alpha_1+\psi_1)(b+c+2\alpha_1+\psi_2)(b+\alpha_2+e+d)+$
$\psi_1\psi_2(b+\alpha_2+e+d)-c\psi_3(b+\alpha_2+b+2\alpha_1)]-$
$[b+\alpha_2+e+d+b+2\alpha_1+\psi_1+b+c+2\alpha_1+\psi_2]^2[(b+$
$2\alpha_1+\psi_1)(b+c+2\alpha_1+\psi_2)(e+d)(b+\alpha_2)+$
$cd\psi_2(b+2\alpha_1+\psi_1)+\psi_1\psi_2(b+\alpha_2)(e+d)+$
$c\psi_1\psi_2(b+\alpha_2)+cd\psi_1(\psi_2+\alpha_2)-c\psi_3(b+\alpha_2)(b+$
$2\alpha_1+\psi_1)]>0$

Telah diuraikan bahwa $D_1=A_4$, maka secara langsung dapat dikatakan bahwa $D_1>0$

Karena $\det(A-B-\lambda I)$ dan $\det(A+B-\lambda I)$ menurut kestabilan Routh-Hurwitz bernilai positif kolom pertama, maka memiliki akar persamaan karakteristik bernilai negatif, dan dikatakan stabil.

<u>Persamaan pada saat masih adanya kemungkinan penularan</u>

Adanya perpindahan indivdiu Susceptibe dan Exposed namun masih ada kemungkinan penularan oleh individu Infected tetapi individu Infected dan Recovered tidak boleh berpindah sehingga $\gamma \neq 0$ persamaan (4.7) menjadi:

$$\dot{S}_1 = a - bS_1 - \frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2} - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 \quad (4.21a)$$

$$\dot{E}_1 = \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_1 + \alpha_1 E_2 + \frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2} \quad (4.21b)$$

$$\dot{I}_1 = cE_1 - (e + d)I_1 \quad (4.21c)$$

$$\dot{R}_1 = dI_1 - (b + \alpha_2)R_1 \quad (4.21d)$$

$$\dot{S}_2 = a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - \frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1} + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 \quad (4.21e)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - (b + c + \alpha_1)E_2 + \alpha_1 E_1 + \frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1} \quad (4.21f)$$

$$\dot{I}_2 = cE_2 - (e + d)I_2 \quad (4.21g)$$

$$\dot{R}_2 = dI_2 - (b + \alpha_2)R_2 \quad (4.21h)$$

Syarat titik kesetimbangan adalah $\dot{S}_1 = \dot{E}_1 = \dot{I}_1 = \dot{R}_1 = \dot{S}_2 = \dot{E}_2 = \dot{I}_2 = \dot{R}_2 = 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu keadaan dimana tidak ada penularan pada suatu kota sehingga $I_1 = I_2 = 0$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 1

Titik kesetimbangan bebas penyakit persamaan (4.21d) $\dot{R}_1 = dI_1 - (b + \alpha_2)R_1 = 0$ karena tidak ada individu yang dapat menularkan penyakit di kota satu $I_1 = 0$ didapat $R_1 = 0$

Titik kesetimbangan bebas penyakit persamaan (4.21c) $\dot{I}_1 = cE_1 - (e + d)I_1 = 0$. Pada kota 1 tidak ada individu yang menularkan penyakit($I_1 = 0$) , semua individu berada pada kelompok individu rentan diperoleh $E_1 = 0$. Oleh karena itu dari persamaan (4.21a) didapat

$$a = (b + \alpha_1)S_1 - \alpha_1 S_2 \quad (4.22)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 2

Karena pada kota 2 juga tidak ada inididu yang dapat menularkan penyakit $I_2 = 0$ dari persamaan (4.21h) diperoleh $R_2 = 0$, selanjutnya dari persamaan (4.21g) diperoleh $E_2 = 0$. Selanjutnya dari persamaan (4.21e) diperoleh

$$a = (b + \alpha_1)S_1 - \alpha_1 S_2 \quad (4.23)$$

Persamaan (4.22) = (4.23)

$$(b + \alpha_1)S_2 - \alpha_1 S_1 = (b + \alpha_1)S_1 - \alpha_1 S_2$$
$$(b + \alpha_1 + \alpha_1)S_2 = (b + \alpha_1 + \alpha_1)S_1$$
$$S_1 = S_2 \quad (4.24)$$

Susbtitusikan (4.24)ke (4.22)

$$a = (b + \alpha_1)S_2 - \alpha_1 S_1$$
$$a = (b + \alpha_1)S_2 - \alpha_1 S_2$$
$$a = bS_2$$
$$S_2 = \frac{a}{b}$$

Dari persamaan (4.24) didapat

$$S_1 = \frac{a}{b}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit persamaan di kota 1 dan kota 2 adalah

$$P_3(S_1, E_1, I_1, R_{1,} S_2, E_2, I_2, R_2) = \left(\frac{a}{b}, 0,0,0, \frac{a}{b}, 0,0,0\right)$$

Matriks Jacobian untuk P_3

$J(P_3) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

$A =$

$$\begin{pmatrix} -(b+\alpha_1) & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -(b+c+\alpha_1) & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e+d+) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b+\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Akar-akar persamaan karakteristik didapat dari

$$\det(J(P_3) - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi didapat
$det(J(P_3) - \lambda I) = \det(A + B - \lambda I)\det(A - B - \lambda I) = 0$
Akar persamaan karakteristik dapat dianalisis dari $A + B$ dan $A - B$.

Mula-mula pandang matriks $A + B$ maka
$\det(A + B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -(b+\lambda) & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -(b+c+\lambda) & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e+d+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b+\lambda+\alpha_2) \end{vmatrix} = 0$$

Hasil perhitungan determinan diperoleh

$$(b+\lambda)(b+\lambda+\alpha_2)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \qquad (4.25)$$

Dengan $a_1 = (b + c + e + d)$

$a_2 = (b + c)(e + d) - \beta c$

Akar persamaan karakteristik diperoleh

$(b + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -b < 0$

$(b + \lambda + \alpha_2) = 0 \rightarrow \lambda_2 = -(b + \alpha_2) < 0$

Nilai akar persamaan yang lain diperoleh dari

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \tag{4.26}$$

Supaya bernilai negatif akar persamaan karakteristiknya, persamaan di atas haruslah memenuhi kriteria kestabilan Routh-Hurwitz yaitu $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$

Bukti:

$a_1 = (b + c + e + d) > 0$

$a_2 = (b + c)(e + d) - \beta c > 0$

$(b + c)(e + d) - \beta c > 0$

$\frac{\beta c}{(b+c)(e+d)} < 1$

Karena akar persamaan karakteristik bernilai negatif dan memenuhi kriteria Routh-Hurwitz.

Selanjutnya pandang matriks $A - B$

$det(A - B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -(b + 2\alpha_1 + \lambda) & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -(b + c + 2\alpha_1 + \lambda) & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e + d + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + \lambda + \alpha_2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(b + 2\alpha_1 + \lambda)(b + \lambda + \alpha_2)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \tag{4.27}$$

Dengan $a_1 = (e + d + b + c + 2\alpha_1)$

$a_2 = (e + d)(b + c + 2\alpha_1) - \beta c$

Akar persamaan karaktersitik dari persamaan (4.27)

$\lambda_1 = -(b + 2\alpha_1) < 0$
$\lambda_2 = -(b + \alpha_2) < 0$

Akar yang lain pada persamaan (4.27) akan ditunjukkan bahwa akar persamaan karakteristiknya bernilai negatif dengan kriteria Routh-Hurwitz ($a_1 > 0, a_2 > 0$)

$a_1 = (e + d + b + c + 2\alpha_1) > 0$
$a_2 > 0$
$(e + d)(b + c + 2\alpha_1) - \beta c > 0$
$\frac{\beta c}{(e+d)(b+c+2\alpha_1)} < 1$
Karena terbukti bahwa $a_1 > 0, a_2 > 0$ maka persamaan (4.16) dapat dikatakan stabil.

<u>Titik kesetimbangan endemik</u>
Selanjutnya akan dicari titik kesetimbangan endemic dimana individu Infected dapat menularkan penyakit dan semua variabelnya tidak bernilai nol. Dari persamaan (4.21) diasumsikan kedua kota identik (parameter demografis sama untuk kedua kota)

Titik kesetimbangan endemic di kota 1
Titik kesetimbangan endemic persamaan (4.21d)
$\dot{R}_1 = dI_1{}^* - (b + \alpha_2)R_1{}^* = 0$ diperoleh

$$I_1{}^* = \frac{(b+\alpha_2)R_1{}^*}{d} \tag{4.28}$$

Titik kesetimbangan endemic persamaan (4.21c)

$\dot{I}_1 = cE_1 - (e + d)I_1{}^* = 0$ diperoleh
$E_1{}^* = \frac{(e+d)I_1{}^*}{c}$ substitusikan persamaan (4.28) sehingga

$$E_1{}^* = \frac{(e+d)(b+\alpha_2)R_1{}^*}{cd} \tag{4.29}$$

Titik kesetimbangan endemic persamaan (4.21b)

$$\dot{E}_1 = \frac{\beta S_1{}^* I_1{}^*}{N_1{}^*} - (b + c + \alpha_1)E_1{}^* + \alpha_1 E_2{}^* + \frac{\gamma\alpha_1 S_2{}^* I_2{}^*}{N_2{}^*} = 0$$

$$\frac{\beta S_1{}^* I_1{}^*}{N_1{}^*} + \frac{\gamma\alpha_1 S_2{}^* I_2{}^*}{N_2} = (b + c + \alpha_1)E_1{}^* - \alpha_1 E_2{}^* \qquad (4.30)$$

Titik ksetimbangan endemic persamaan (4.21a)

$$\dot{S}_1 = a - bS_1{}^* + \alpha_2 R_1{}^* - \alpha_1 S_1{}^* + \alpha_1 S_2{}^* - \frac{\beta S_1{}^* I_1{}^*}{N_1{}^*} - \frac{\gamma\alpha_1 S_2{}^* I_2{}^*}{N_2{}^*} = 0$$

Substitusikan (4.30) sehingga didapat

$$(b + \alpha_1)S_1{}^* = \alpha_2 R_1{}^* + \alpha_1 S_2{}^* - (b + c + \alpha_1)E_1{}^* + \alpha_1 E_2{}^*$$

$$S_1{}^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}\left[\alpha_2 R_1{}^* + \alpha_1 S_2{}^* - (b + c + \alpha_1)E_1{}^* + \alpha_1 E_2{}^*\right] \qquad (4.31)$$

Titik kesetimbangan endemic di kota 2

Titik kesetimbangan endemik persamaan (4.21h)

$\dot{R}_2 = dI_2{}^* - (b + \alpha_2)R_2{}^* = 0$ diperoleh

$$I_2{}^* = \frac{(b+\alpha_2)R_2{}^*}{d} \qquad (4.32)$$

Titik kesetimbangan endemic persamaan (4.21g)

$\dot{I}_2 = cE_2{}^* - (e + d)I_2{}^* = 0$ diperoleh

$E_2{}^* = \frac{(e+d)I_2{}^*}{c}$ substitusikan persamaan (4.32) sehingga

$$E_2{}^* = \frac{(e+d)(b+\alpha_2)R_2{}^*}{cd} \qquad (4.33)$$

Titik kesetimbangan endemic persamaan (4.21f)

$$\dot{E}_2 = \frac{\beta S_2{}^* I_2{}^*}{N_2{}^*} - (b + c + \alpha_1)E_2{}^* + \alpha_1 E_1{}^* + \frac{\gamma\alpha_1 S_1{}^* I_1{}^*}{N_1{}^*} = 0$$

$$\frac{\beta S_2{}^* I_2{}^*}{N_2{}^*} + \frac{\gamma\alpha_1 S_1{}^* I_1{}^*}{N_1{}^*} = (b + c + \alpha_1)E_2{}^* - \alpha_1 E_1{}^* \qquad (4.34)$$

$$\dot{S}_2 = a - bS_2{}^* + \alpha_2 R_2{}^* - \alpha_1 S_2{}^* + \alpha_1 S_1{}^* - \frac{\beta S_2{}^* I_2{}^*}{N_2{}^*} - \frac{\gamma\alpha_1 S_1{}^* I_1{}^*}{N_1{}^*} = 0$$

Substitusikan (4.34)

$(b+\alpha_1)S_2{}^* = a + \alpha_2 R_2{}^* + \alpha_1 S_1{}^* - (b+c+\alpha_1)E_2{}^* + \alpha_1 E_1{}^*$

$$S_2{}^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}[+\alpha_2 R_2{}^* + \alpha_1 S_1{}^* - (b+c+\alpha_1)E_2{}^* + \alpha_1 E_1{}^*] \tag{4.35}$$

Diperoleh titik kesetimbangan endemik
$P_4(S_1{}^*, E_1{}^*, I_1{}^*, R_1{}^*, S_2{}^*, E_2{}^*, I_2{}^*, R_2{}^*)$

Akar persamaan karakteristik didapat $det(J(P_4) - \lambda I) = 0$

$$det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Dari sifat determinan matriks partisi diperoleh
$det(J(P_4) - \lambda I) = det(A - B - \lambda I)det(A + B - \lambda I) = 0$
Akar persamaan $J(P_4)$ dapat dicari dengan menganalisis $(A - B)\ dan\ (A + B)$

Pandang matriks $(A + B)$
$det(A + B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-\theta_1-\lambda & \theta_2 & -\theta_3 & \theta_2+\alpha_2 \\ \mu_1 & -b-c-\theta_2-\lambda & \theta_3 & -\theta_2 \\ 0 & c & e-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan
$\theta_1 = \psi_1 + \mu_1$, $\theta_2 = \psi_2 + \mu_2$, $\theta_3 = \psi_3 + \mu_3$ dan
$\psi_1 = \left(\frac{\beta I(N-S)}{N^2}\right)$, $\psi_2 = \frac{\beta SI}{N^2}$, $\psi_3 = \left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right)$, $\mu_1 = \frac{\gamma\alpha_1 I_1(N-S)}{N^2}$
$\mu_2 = \frac{\gamma\alpha_1 SI}{N^2}$, $\mu_3 = \frac{\gamma\alpha_1 S_1(N-I)}{N^2}$

Dengan melakukan perhitungan didapat persamaan
$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4\lambda^0 = 0$
Untuk memudahkan melihat akar persamaan karaktersitik tanpa mencarinya digunakan kestabilan Routh-Hurwitz.

Table 4.3. Tabel Routh-Hurwitz

λ^4	A_0	A_2	A_4	0
λ^3	A_1	A_3	0	0
λ^2	B_1	A_4	0	0
λ^1	C_1	0	0	0
λ^0	D_1	0	0	0

Karena $A_1 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$ dapat disimpulkan bahwa akar persamaan karakteristik bernilai negatif.

Akar persamaan karakteristik yang lain didapat dari
$\det(A - B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-2\alpha_1-\phi_1-\lambda & \phi_2 & -\phi_3 & \phi_2+\alpha_2 \\ \phi_1 & -\phi_2-b-c-2\alpha_1-\lambda & \phi_3 & -\phi_2 \\ 0 & c & -e-d-2\alpha_1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -\phi_4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan :
$\phi_1 = \psi_1 - \mu_1$,$\phi_2 = \psi_2 - \mu_2$, $\phi_3 = \psi_3 - \mu_3$
$\phi_4 = b + 2\alpha_1 + \alpha_2$
Dan
$\psi_1 = \left(\frac{\beta I(N-S)}{N^2}\right), \psi_2 = \frac{\beta SI}{N^2}, \psi_3 = \left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right)$
Setelah melakukan perhitungan dari determinan diperoleh persamaan $A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4\lambda^0 = 0$
Untuk memudahkan melihat akar persamaan karaktersitik tanpa mencarinya digunakan kestabilan Routh-Hurwitz

Tabel 4.4. Tabel Routh-Hurwitz

λ^4	A_0	A_2	A_4	0
λ^3	A_1	A_3	0	0
λ^2	B_1	A_4	0	0
λ^1	C_1	0	0	0
λ^0	D_1	0	0	0

Karena $A_1 > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, D_1 > 0$ dapat disimpulkan bahwa akar persamaan karakteristik bernilai negatif.

Dari matriks $(A + B) dan\, (A - B)$ nilai akar persamaan karakteristik bernilai negatif, dapat dikatakan bahwa model persamaan penyebaran penyakit dengan individu Susceptible dan Exposed berpindah mempunyai titik kesetimbangan endemic yang stabil.

Tidak adanya penularan penyakit di kota 1 namun masih ada kemungkinan terjadinya penularan di kota 2

Kemudian mencari titik kesetimbangan bebas penyakit pada kota 1. Karena tidak adanya penularan penyakit di kota 1 namun masih ada kemungkinan penularan penyakit di kota 2 maka $I_1 = 0, I_2 \neq 0$.

Syarat titik kesetimbangan adalah $\dot{S}_1 = \dot{E}_1 = \dot{I}_1 = \dot{R}_1 = \dot{S}_2 = \dot{E}_2 = \dot{I}_2 = \dot{R}_2 = 0$

Dari titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 1 dan titik endemic di kota 2 didapat titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 1 adalah

$$P_5(S_1, E_1, I_1, R_1, S_2, E_2, I_2, R_2) = (S_1, 0,0,0, S_2, E_2, I_2, R_2)$$

Matriks Jacobian untuk P_5

$$J(P_5) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

Dengan

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b - \alpha_1 & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e + d) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & -\gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1-\psi_4 & \psi_5 & -\psi_6 & \alpha_2+\psi_5 \\ \psi_4 & -\psi_5 & \psi_6 & -\psi_5 \\ 0 & c & -(e+d) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b+\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1-\mu_4 & \mu_5 & -\mu_6 & \mu_5 \\ \mu_4 & -\mu_5 & \mu_6 & -\mu_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan

$\psi_1 = \frac{\beta I_1(N_1-S_1)}{N_1^2}$ $\qquad$ $\mu_1 = \frac{\gamma\alpha_1 I_1(N_1-S_1)}{N_1^2}$

$\psi_2 = \frac{\beta S_1 I_1}{N_1^2}$ $\qquad$ $\mu_2 = \frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1^2}$

$\psi_3 = \frac{\beta S_1(N_1-I_1)}{N_1^2}$ $\qquad$ $\mu_3 = \frac{\gamma\alpha_1 S_1(N_1-I_1)}{N_1^2}$

$\psi_4 = \frac{\beta I_2(N_2-S_2)}{N_2^2}$ $\qquad$ $\mu_4 = \frac{\gamma\alpha_1 I_2(N_2-S_2)}{N_2^2}$

$\psi_5 = \frac{\beta S_2 I_2}{N_2^2}$ $\qquad$ $\mu_5 = \frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2^2}$

$\psi_6 = \frac{\beta S_2(N_2-I_2)}{N_2^2}$ $\qquad$ $\mu_6 = \frac{\gamma\alpha_1 S_2(N_2-I_2)}{N_2^2}$

Akar persamaan karakteristik diperoleh $\det(J(P_5)-\lambda I)=0$

$$det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi diperoleh

$$det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = \det(A-B-\lambda I)\det(A+B-\lambda I)$$

Nilai eigen dari $J(P_5)$ dapat diketahui dari mengamalisis nilai eigen dari $A - B$ dan $A + B$

Hasil perhitungan didapat persamaan karakteristik sebagai berikut

$$A_0\lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda^1 + A_5\lambda^0 = 0$$

Dengan Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa persamaan model penyebaran penyakit dengan hanya individu Susceptible dan Exposed yang boleh berpindah mempunyai akar negatif sehingga disimpulkan stabil.

<u>Titik Kesetimbangan bebas penyakit di kota 2</u>

Masih ada kemungkinan individu yang dapat menularkan penyakit di kota 1 maka keadaan di kota 1 dapat dikatakan endemic namun di kota 2 tidak ada individu yang dapat menularkan penyakit maka keadaan di kota 2 dapat dikatakan bebas penyakit sehingga $I_1 \neq 0, I_2 = 0$.

Dari titik kesetimbangan endemic di kota 1 dan titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 2 diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 2 adalah $P_6(S_1, E_1, I_1, R_1, S_2, E_2, I_2, R_2) = (S_1, E_1, I_1, R_1, S_2, 0,0,0)$

Matriks Jacobian untuk $J(P_6)$ sebagai berikut

$$J(P_6) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

Dengan

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b - \alpha_1 - \psi_1 & \psi_2 & -\psi_3 & \alpha_2 + \psi_2 \\ \psi_1 & -\psi_2 & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 & c & -(e+d) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b+\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \mu_1 & \mu_2 & -\mu_3 & \mu_2 \\ \mu_1 & -\mu_2 & \mu_2 & -\mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1 & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & c & -(e+d) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b+\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & -\gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan

$\psi_1 = \frac{\beta I_1(N_1-S_1)}{N_1^2}$ $\quad\quad$ $\mu_1 = \frac{\gamma\alpha_1 I_1(N_1-S_1)}{N_1^2}$

$\psi_2 = \frac{\beta S_1 I_1}{N_1^2}$ $\quad\quad$ $\mu_2 = \frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1^2}$

$\psi_3 = \frac{\beta S_1(N_1-I_1)}{N_1^2}$ $\quad\quad$ $\mu_3 = \frac{\gamma\alpha_1 S_1(N_1-I_1)}{N_1^2}$

$\psi_4 = \frac{\beta I_2(N_2-S_2)}{N_2^2}$ $\quad\quad$ $\mu_4 = \frac{\gamma\alpha_1 I_2(N_2-S_2)}{N_2^2}$

$\psi_5 = \frac{\beta S_2 I_2}{N_2^2}$ $\quad\quad$ $\mu_5 = \frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2^2}$

$\psi_6 = \frac{\beta S_2(N_2-I_2)}{N_2^2}$ $\quad\quad$ $\mu_6 = \frac{\gamma\alpha_1 S_2(N_2-I_2)}{N_2^2}$

Nilai eigen atau persamaan karakteristik dari $J(P_6)$ diperoleh dari $det(J(P_6) - \lambda I) = 0$

$$det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi, nilai eigen $J(P_6)$ dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen $(A+B)$ dan $(A-B)$

Sifat determinan matriks partisi yaitu

$det(J(P_6) - \lambda I) = det(A + B - \lambda I) det(A + B - \lambda I)$

Diperoleh

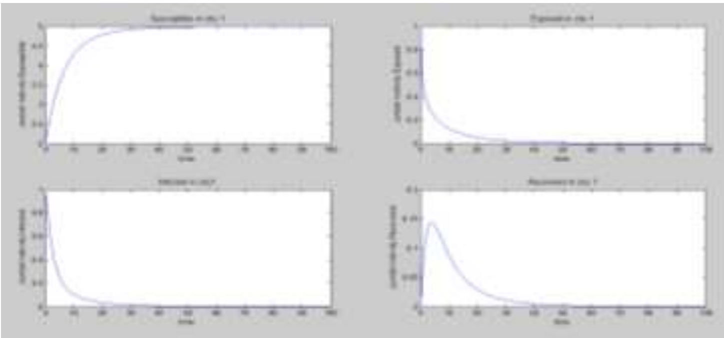
$$A_0\lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda^1 + A_5\lambda^0 = 0 \qquad (4.36)$$

Dengan Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat disimpulkan bahwa persamaan (4.36) mempunyai akar persamaan karakteristik yang negative sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit $J(P_6)$ dikatakan stabil.

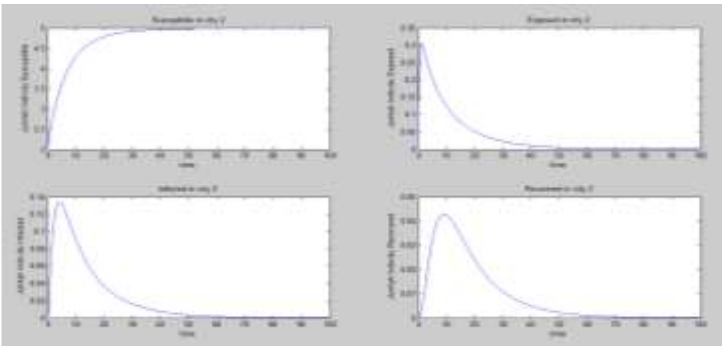
Hasil simulasi model penyebaran penyakit menular hanya individu Susceptible dan Exposed yang berpindah
Dengan parameter

$a = 1$, $b = 0.2$, $c = 0.3$, $d = 0.1$, $e = 0.4$,$\alpha_1 = 0.9$,$\alpha_2 = 0.03, \gamma = 0$
Dan nilai awal
$\left(S_1(0), E_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0), R_2(0)\right) = (2,1,1,0,2,0,0,0)$

a. Dengan mengambil $\beta = 0.6$ didapat bilangan reproduskinya 0.72 yang berarti nilainya kurang dari satu. Bilangan reproduksi kurang dari satu mempunyai maksud adanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil



Gambar 4.4 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Menular Hanya Individu Susceptible dan Exposed Berpindah di Kota 1



Gambar 4.5 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Menular Hanya Individu Susceptible dan Exposed Berpindah di Kota 2

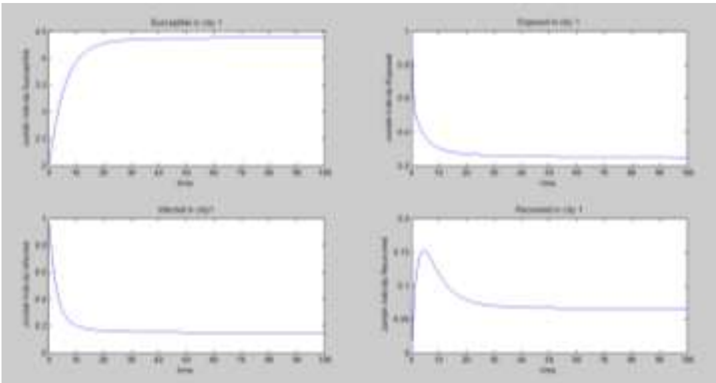
Laju perubahan pada individu Susceptible pada kedua kota mengalami kenaikan karena adanya individu yang sembuh menjadi rentan kembali serta perpindahan individu dari kota lain. Kemudian pada suatu titik tertentu grafik konstan, terjadi karena adanya perpindahan individu ke kota lain serta berubahnya individu Susceptible menjadi individu Exposed.

Laju perubahan individu Exposed pada kedua kota mengalami kenaikan karena adanya perpindahan individu dari kota lain serta dari pertambahan individu susceptible menjadi Exposed. Kemudian mengalami penurunan dan menjadi konstan karena perpindahan individu ke kota lain serta individu Exposed terinfeksi penyakit.

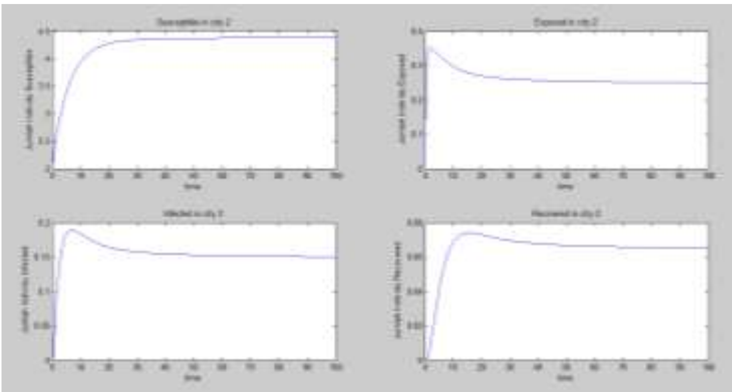
Laju perubahan individu Infected pada kedua kota mula-mula mengalami kenaikan karena perubahan individu Exposed yang terinfeksi namun individu infected dari kota lain tidak boleh berpindah. Kemudian pada saat titik tertentu mengalami penurunan karena individu yang terinfeksi kembali sembuh.

Laju perubahan pada individu Recovered pada kedua kota mengalami kenaikan dikarenakan individu yang terinfeksi telah sembuh tetapi terjadi penurunan karena individu yang telah sembuh menjadi rentan dan tidak ada penambahan individu dari kota lain sehingga laju berkurang kemudian konstan dan grafik menunjukkan kestabilan (konstan).

b. Dengan mengambil $\beta = 0.95$ diperoleh bilangan reproduksinya 1,14. Karena bilangan reproduksinya lebih dari satu berarti terdapat titik kesetimbangan endemic yang stabil



Gambar 4.6 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Menular Hanya Individu Susceptible dan Exposed Berpindah di Kota 1



Gambar 4.7 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Menular Hanya Individu Susceptible dan Exposed Berpindah di Kota 2

Laju perubahan pada individu Susceptible pada kedua kota mengalami kenaikan karena adanya individu yang sembuh menjadi rentan kembali serta perpindahan individu dari kota lain. Kemudian pada suatu titik tertentu grafik menunjukkan konstan karena adanya perpindahan individu ke kota lain serta berubahnya individu Susceptible menjadi individu Exposed.

Laju perubahan individu Exposed pada kedua kota mengalami kenaikan karena adanya perpindahan individu dari kota lain serta dari pertambahan individu susceptible menjadi exposed. Kemudian turun dan menjadi konstan karena perpindahan individu ke kota lain serta individu Exposed terinfeksi penyakit.

Laju perubahan individu Infected pada kedua kota mula-mula mengalami kenaikan karena perubahan individu Exposed di masing-masing kota yang terinfeksi namun individu infected dari kota lain dilarang untuk melakukan perjalanan ke kota lain. Kemudian pada saat titik tertentu mengalami penurunan karena individu yang terinfeksi kembali sembuh.

Laju perubahan pada individu Recovered pada kedua kota mengalami kenaikan dikarenakan individu yang terinfeksi telah sembuh tetapi terjadi penurunan karena individu yang telah sembuh menjadi konstan dan grafik menunjukkan kestabilan (konstan).

4.4. Model Epidemik Penyebaran Penyakit Menular dengan Semua Individu Berpindah

Pada tahap ini semua individu berpindah $(\gamma \neq 0)$, persamaannya:

$$\dot{S}_1 = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 \tag{4.37a}$$

$$\dot{E}_1 = \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_1 + \alpha_1 E_2 + \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} \quad (4.\ 37b)$$

$$\dot{I}_1 = cE_1 - (e + d + \alpha_1)I_1 + \alpha_1 \mathrm{I}_2 \quad (4.\ 37c)$$

$$\dot{R}_1 = dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2 \quad (4.\ 37d)$$

$$\dot{S}_2 = a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} \quad (4.\ 37e)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - (b + c + \alpha_1)E_2 + \alpha_1 E_1 + \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} \quad (4.\ 37f)$$

$$\dot{I}_2 = cE_2 - (e + d + \alpha_1)I_2 + \alpha_1 \mathrm{I}_1 \quad (4.\ 37g)$$

$$\dot{R}_2 = dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1 \quad (4.\ 37h)$$

N merupakan jumlah semua populasi baik di kota 1 maupun 2 dapat ditulis

$$N = S_1 + E_1 + I_1 + R_1 + S_2 + E_2 + I_2 + R_2$$

Maka $\dot{N} = \dot{S}_1 + \dot{E}_1 + \dot{I}_1 + \dot{R}_1 + \dot{S}_2 + \dot{E}_2 + \dot{I}_2 + \dot{R}_2$

Substitusikan persamaan (4.47) sehingga

$$\dot{N} = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} + \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} - (b + c + \alpha_1)E_1 + \alpha_1 E_2 + \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} + cE_1 - (e + d + \alpha_1)I_1 + \alpha_1 \mathrm{I}_2 + dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2 + a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} + \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} - (b + c + \alpha_1)E_2 + \alpha_1 E_1 + \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} + cE_1 - (e + d + \alpha_1)I_2 + \alpha_1 \mathrm{I}_1 + dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1$$

$$\dot{N} = 2a - b(S_1 + E_1 + R_1 + S_2 + E_2 + R_2) - e(I_1 + I_2)$$

Tingkat kematian karena penyakit maupun alami lebih banyak dari hanya kematian alami dan dapat ditulis sebagai

Karena $e \geq b$

Kedua ruas dikalikan dengan $(I_1 + I_2)$

$e(I_1 + I_2) \geq b(I_1 + I_2)$

$-e(I_1 + I_2) \leq -b(I_1 + I_2)$

$\dot{N} \leq 2a - b(S_1 + E_1 + I_1 + R_1 + S_2 + E_2 + I_2 + R_2)$

$\dot{N} \leq 2a - bN$

$\dot{N} + bN \leq 2a$

$\frac{d}{dt}\left[N \,.\, e^{\int b\,dt}\right] \leq 2a\, e^{\int b\,dt}$

$e^{bt}\,.\,N \leq \int 2a\, e^{bt}\,dt$

$e^{bt}.N \leq \frac{2a}{b} e^{bt} + k$

$N \leq \frac{2a}{b} + k.e^{-bt}$ dengan k adalah konstanta positif

$\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \lim_{t\to\infty} \frac{2a}{b} + \lim_{t\to\infty} k.e^{-bt}$

$\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{2a}{b}$

Karena $\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{2a}{b}$

Maka $0 < N(t) \leq \frac{2a}{b}$

Dapat disimpulkan

$S = \left\{(S_1, E_1, R_1, S_2, E_2, I_2, R_2)/S_1 > 0; E_1 \geq 0; I_1 \geq 0; R_1 \geq 0; S_2 > 0; E_2 \geq 0\,; I_2 \geq 0; R_2 \geq 0; S_1 + E_1 + I_1 + R_1 + S_2 + E_2 + I_2 + R_2 = N = \frac{2a}{b}\right\}$

Selanjutnya dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dimana tidak ada penularan penyakit pada masing-masing kota sehingga $I_1 = 0, I_2 = 0$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 1

Titik kesetimbangan untuk persamaan (4.37d)

$$\dot{R}_1 = dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2 = 0$$

Karena $I_1 = 0$ didapat

$$(b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 = \alpha_1 R_2$$

$$\frac{(b+\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1} = \frac{R_2}{R_1} \tag{4.38}$$

Titik kesetimbangan untuk persamaan (4.37c)

$\dot{I}_1 = cE_1 - (e + d + \alpha_1)I_1 + \alpha_1 \mathrm{I}_2 = 0$ karena $I_1 = \mathrm{I}_2 = 0$ dipeorleh $E_1 = 0$

Titik kesetimbangan untuk persamaan (4.37a)

$$\dot{S}_1 = a - bS_1 - \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} = 0$$

Karena $I_1 = \mathrm{I}_2 = 0$ didapat

$$0 = a - bS_1 + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 \tag{4.39}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 2

Selanjutnya mencari titik kesetimbangan bebas penyakit di kota 2 dengan keadaan $I_2 = 0$ karena tidak ada penularan penyakit.

Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk persamaan (4.37h)

$\dot{R}_2 = dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1 = 0$ didapat

$(b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 = \alpha_1 R_1$

$$\frac{(b+\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (4.40)$$

Dari persamaan (4.38) dan (4.40) diperoleh

$$R_1 = R_2 \quad (4.41)$$

Substitusikan persamaan (4.41) ke (4.37h) sehingga diperoleh

$R_2 = 0$ dan pada persamaan (4.41) diperoleh $R_1 = 0$.

Kemudian Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk persamaan (4.37g)

$\dot{I}_2 = cE_2 - (e + d + \alpha_1)I_2 + \alpha_1 \mathrm{I}_1 = 0$ karena $\mathrm{I}_1 = 0$, I_2 didapat $E_2 = 0$

Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk persamaan (4.37e)

$$\dot{S}_2 = a - bS_2 - \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} = 0$$

Dari keadaan bebas penyakit pada kedua kota maka $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ sehingga diperoleh

$$0 = a - bS_1 + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 \quad (4.42)$$

Persamaan (4.49) = (4.52)

$a - bS_1 + \alpha_2 R_1 - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 = a - bS_2 + \alpha_2 R_2 - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1$ mendapatkan

$$S_1 = S_2 \quad (4.43)$$

Dari persamaan (4.39) substitusikan persamaan (4.43) menghasilkan $S_1 = \frac{a}{b}$ dan $S_2 = \frac{a}{b}$

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada model persamaan (4.37) adalah $P_1(\frac{a}{b}, 0,0,0, \frac{a}{b}, 0,0,0)$

Matriks Jacobian untuk P_1 sebagai berikut

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Dengan :

$$A = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1 & 0 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & -b-c-\alpha_1 & \beta & 0 \\ 0 & c & -e-d-\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & -\gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & c & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Akar persamaan karakteristik dapat dipeorleh dari
$\det(J(P_1) - \lambda I) = 0$

$$det \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ B & \lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi diperoleh
$\det(J(P_1) - \lambda I) = det(A + B - \lambda I)\det(A - B - \lambda I) = 0$
Akar persamaan karakteristik dapat diketahui dari nilai eigen $(A + B)\ dan\ (A - B)$.
Untuk nilai eigen pada matriks $(A + B)$
$\det(A + B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-\lambda & 0 & -\beta-\gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & -b-c-\lambda & \beta+\gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & c & -e-d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dihasilkan
$$(b+\lambda)(b+\alpha_2+\lambda)[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2] = 0 \tag{4.44}$$
Dengan
$a_1 = e + d + b + c$

$a_2 = (e + d)(b + c) - c(\beta + \gamma\alpha_1)$
Akar-akar persamaan yang diperoleh adalah
$b + \lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = -b < 0$
$b + \alpha_2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda_2 = -(b + \alpha_2) < 0$
Untuk mendapat akar persamaan yang lain pada persamaan (4.54) digunakan kestabilan Routh-Hurwitz dengan syarat $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$
$a_1 = (e + d + b + c) > 0$
$a_2 = (e + d)(b + c) - c(\beta + \gamma\alpha_1) > 0$
$\frac{c(\beta+\gamma\alpha_1)}{(e+d)(b+c)} < 1$
Dari kestabilan Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa persamaan (4.54) mempunyai nilai eigen yang negatif

Untuk nilai eigen matriks $(A - B)$
$\det(A - B - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -m-\lambda & 0 & -\beta+\gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & -n-\lambda & \beta-\gamma\alpha_1 & 0 \\ 0 & c & -p-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -k-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan $m = b + 2\alpha_1$, $n = b + c + 2\alpha_1$, $p = e + d + 2\alpha_1$ dan $k = b + 2\alpha_1 + \alpha_2$
diperoleh akar persamaan karakteristiknya
$(m + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -m = -(b + 2\alpha_1) < 0$
$k + \lambda = 0 \rightarrow \lambda_2 = -k = -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) < 0$
$$\lambda^2 + (p + n)\lambda - c(\beta - \gamma\alpha_1) + pn = 0 \qquad (4.45)$$

Agar persamaan (4.45) mempunyai akar persamaan yang negative maka menurut kriteria Routh-Hurwitz haruslah $(p + n) = e + d + 2\alpha_1 + b + c + 2\alpha_1 > 0$ dan
$-c(\beta - \gamma\alpha_1) + pn > 0$
$-c(\beta - \gamma\alpha_1) + (e + d)(2\alpha_1 + b + c + 2\alpha_1) > 0$
$\frac{c(\beta-\gamma\alpha_1)}{(e+d)(2\alpha_1+b+c+2\alpha_1)} < 1$

Nilai eigen yang didapat dari matriks $(A-B)$ dan $(A+B)$ bernilai negative, maka dapat dikatakan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil dengan $\frac{c(\beta+\gamma\alpha_1)}{(e+d)(b+c)} < 1$.

Titik kesetimbangan endemik

Dicari titik kesetimbangan endemik yaitu adanya penularan penyakit di masing-masing kota dan diasumsikan kedua kota identik maka $I_1^* \neq 0, I_2^* \neq 0$.

Titik kesetimbangan endemic di kota 1 untuk

a. Titik kesetimbangan endemik $\dot{R}_1 = 0$

$\dot{R}_1 = dI_1^* - (b+\alpha_1+\alpha_2)R_1^* + \alpha_1 R_2^* = 0$ diperoleh

$$I_1^* = \frac{(b+\alpha_1+\alpha_2)R_1^* - \alpha_1 R_2^*}{d} \qquad (4.46)$$

b. Titik kesetimbangan endemik untuk $\dot{I}_1 = 0$

$\dot{I}_1 = cE_1^* - (e+d+\alpha_1)I_1^* + \alpha_1 I_2^* = 0$ diperoleh

$$E_1^* = \frac{(e+d+\alpha_1)I_1^* - \alpha_1 I_2^*}{c} \qquad (4.47)$$

c. Titik kesetimbangan endemic untuk $\dot{E}_1 = 0$

$\dot{E}_1 = \frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} - (b+c+\alpha_1)E_1^* + \alpha_1 E_2^* + \frac{\gamma\alpha_1 S_2^* I_2^*}{N_2^*} = 0$ didapat

$$\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} + \frac{\gamma\alpha_1 S_2^* I_2^*}{N_2^*} = (b+c+\alpha_1)E_1^* - \alpha_1 E_2^* \qquad (4.48)$$

d. Titik kesetimbangan endemik untuk $\dot{S}_1 = 0$

$$\dot{S}_1 = a - bS_1^* - \frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} + \alpha_2 R_1^* - \alpha_1 S_1^* + \alpha_1 S_2^* - \frac{\gamma\alpha_1 S_2^* I_2^*}{N_2^*} = 0$$

$$\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^*} + \frac{\gamma\alpha_1 S_2^* I_2^*}{N_2^*} = a - bS_1^* + \alpha_2 R_1^* - \alpha_1 S_1^* + \alpha_1 S_2^*$$

Substitusikan (4.48) menjadi

$$(b+c+\alpha_1)E_1^* - \alpha_1 E_2^* = a - bS_1^* + \alpha_2 R_1^* - \alpha_1 S_1^* + \alpha_1 S_2^*$$

$$(b+c+\alpha_1)E_1^* - \alpha_1 E_2^* = a - (b+\alpha_1)S_1^* + \alpha_1 S_2^*$$

Sehingga diperoleh

$$S_1^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}[a + \alpha_1 S_2^* + \alpha_2 R_1^* - (b + c + \alpha_1)E_1^* + \alpha_1 E_2^*] \tag{4.49}$$

Titik kesetimbangan endemic di kota 2

a. Titik kesetimbangan endemik untuk $\dot{R}_2 = 0$

$\dot{R}_2 = dI_2^* - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2^* + \alpha_1 R_1^* = 0$ diperoleh

$$I_2^* = \frac{(b+\alpha_1+\alpha_2)R_2^* - \alpha_1 R_1^*}{d} \tag{4.50}$$

b. Titik kesetimbangan endemik untuk $\dot{I}_2 = 0$

$\dot{I}_2 = cE_2^* - (e + d + \alpha_1)I_2^* + \alpha_1 I_1^* = 0$ didapat

$$E_2^* = \frac{(e+d+\alpha_1)I_2^* - \alpha_1 I_1^*}{c} \tag{4.51}$$

c. Titik kesetimbangan endemik untuk $\dot{E}_{;2} = 0$

$$\dot{E}_{;2} = \frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} - (b + c + \alpha_1)E_2^* + \alpha_1 E_1^* + \frac{\gamma \alpha_1 S_1^* I_1^*}{N_1^*} = 0$$

$$\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} + \frac{\gamma \alpha_1 S_1^* I_1^*}{N_1^*} = (b + c + \alpha_1)E_2^* - \alpha_1 E_1^* \tag{4.52}$$

d. Untuk $\dot{S}_2 = 0$

$$\dot{S}_2 = a - bS_2^* - \frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} + \alpha_2 R_2^* - \alpha_1 S_2^* + \alpha_1 S_1^* - \frac{\gamma \alpha_1 S_1^* I_1^*}{N_1^*} = 0$$

$$\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^*} + \frac{\gamma \alpha_1 S_1^* I_1^*}{N_1^*} = a - bS_2^* + +\alpha_2 R_2^* - \alpha_1 S_2^* + \alpha_1 S_1^*$$

Substitusikan (4.52) sehingga

$$(b + c + \alpha_1)E_2^* - \alpha_1 E_1^* = a - bS_2^* + \alpha_2 R_2^* - \alpha_1 S_2^* + \alpha_1 S_1^*$$

Dan diperoleh

$$S_2^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}[-(b + c + \alpha_1)E_2^* + \alpha_1 E_1^* + \alpha_2 R_2^* + \alpha_1 S_1^*] \tag{4.53}$$

Titik kesetimbangan endemic dari model persamaan (4.37) adalah $P_2(S_{1,}^* E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$

Matriks Jacobian untuk P_2 adalah

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1-\psi_1 & -\psi_2 & -\psi_3 & \psi_2+\alpha_2 \\ \psi_1 & -\psi_2-b-c-\alpha_1 & \psi_3 & -\psi_2 \\ 0 \quad c & & e-d-\alpha_1 & 0 \\ 0 \quad 0 & & d & -b-\alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \alpha_1-\mu_1 & \mu_2 & -\mu_3 & \mu_2 \\ \mu_1 & \alpha_1-\mu_2 & \mu_3 & -\mu_2 \\ 0 \quad 0 & & \alpha_1 & 0 \\ 0 \quad 0 & & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{\beta I(N-S)}{N^2}\right) \qquad \mu_1 = \frac{\gamma\alpha_1 I_1(N-S)}{N^2}$$

$$\psi_2 = \frac{\beta SI}{N^2} \qquad \mu_2 = \frac{\gamma\alpha_1 SI}{N^2}$$

$$\psi_3 = \left(\frac{\beta S(N-I)}{N^2}\right) \qquad \mu_3 = \frac{\gamma\alpha_1 S_1(N-I)}{N^2}$$

Akar persamaan karakteristik diperoleh dari

$$\det(J(P_1)-\lambda I) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ B & A-\lambda I \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan sifat determinan matriks partisi diperoleh

$$\det(J(P_1)-\lambda I) = \det(A+B-\lambda I)\det(A-B-\lambda I) = 0$$

Nilai eigen dari $J(P_1)$ dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari $(A-B)$ dan $(A+B)$

Pandang matriks $A+B$

Akar persamaan karaktersitik dari $\det(A+B-\lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -b-\theta_1-\lambda & \theta_2 & -\theta_3 & \theta_2+\alpha_2 \\ \mu_1 & -b-c-\theta_2-\lambda & \theta_3 & -\theta_2 \\ 0 \quad c & & e-d-\lambda & 0 \\ 0 \quad 0 & & d & -b-\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan $\theta_1 = \psi_1 + \mu_1$, $\theta_2 = \psi_2 + \mu_2$, $\theta_3 = \psi_3 + \mu_3$
Dari melakukan perhitungan didapat persamaan
$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4\lambda^0 = 0$

Untuk memudahkan melihat akar-akar persamaan tanpa mencarinya digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

Table 4.5. Tabel Routh-Hurwitz

λ^4	A_0	A_2	A_4	0
λ^3	A_1	A_3	0	0
λ^2	B_1	A_4	0	0
λ^1	C_1	0	0	0
λ^0	D_1	0	0	0

Dikatakan stabil jika nilai pada kolom pertama table Routh lebih dari nol.
Pembuktiannya adalah
$A_0 = 1 > 0$
$A_1 = (b + \theta_1 + b + c + \theta_2 + e + d + b + \alpha_2) > 0$

Untuk A_2

$A_2 = (b + \alpha_2)(e + d) + (b + \theta_1 + b + c + \theta_2)(e + d + b + \alpha_2) + (b + \theta_1)(e + d) - c\theta_3 - \theta_1\theta_2 > 0$

Untuk A_3
$A_3 = (b + \alpha_2)(e + d)(b + \theta_1 + b + c + \theta_2) - c\theta_3(b + \alpha_2 + b + \theta_1) - \theta_1\theta_2(e + d + b + \alpha_2) + c\theta_3\theta_1 + (b + \theta_1)(b + c + \theta_2)(e + d + b + \alpha_2) + cd\theta_2 > 0$

Untuk A_4
$A_4 = (b + \theta_1)(b + c + \theta_2)(e + d)(b + \alpha_2) - c\theta_3(b + \alpha_2)(b + \theta_1) - \theta_1\theta_2(b + \alpha_2)(e + d) + c\theta_1\theta_3(b + \alpha_2) - cd(\theta_2 + \alpha_2) > 0$

Untuk B_1
$B_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$

$A_1A_2 - A_3 =$
$(b + \alpha_2)(e + d)(b + \alpha_2 + e + d) + (b + \theta_1)(b + c + \theta_2)(b + \theta_1 + b + c + \theta_2) + (b + c + \theta_2)(b + \theta_1)(b + \theta_1 + b + c + \theta_2 + e + d + b + \alpha_2) - c\theta_1\theta_3 - c\theta_3(b + c + \theta_2 + e + d) - \theta_1\theta_2(b + c + \theta_2 + b + \theta_1) + (b + \theta_1 + b + \theta_2)(e + b + \alpha_2)(b + \theta_1 + b + c + e + d + b + \alpha_2) + \theta_2(b + \theta_1 + b + \theta_2)(e + b + \alpha_2) + d(b + \theta_1 + b + c + \theta_2)(b + \theta_1 + b + c + d + e + b + \alpha_2) + d\theta_2(b + \theta_1 + b + c + \theta_2) + c(e + b + \alpha_2)(b + \theta_1 + b + c + d + e + b + \alpha_2) + c\theta_2(e + b + \alpha_2) + cd(b + \theta_1 + b + c + d + e + b + \alpha_2) > 0$

Untuk $C_1 = \frac{A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4}{A_1A_2 - A_3}$
$A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 = (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2A_4 > 0$

Untuk $D_1 = A_4 > 0$

Nilai eigen untuk $(A - B)$ adalah $|J(A - B) - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -b - 2\alpha_1 - \phi_1 - \lambda & \phi_2 & -\phi_3 & \phi_2 + \alpha_2 \\ \phi_1 & -\phi_2 - b - c - 2\alpha_1 - \lambda & \phi_3 & -\phi_2 \\ 0 & c & e - d - 2\alpha_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -\phi_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan :
$\phi_1 = \psi_1 - \mu_1$
$\phi_2 = \psi_2 - \mu_2$
$\phi_3 = \psi_3 - \mu_3$
$\phi_4 = b + 2\alpha_1 + \alpha_2$

Mendapatkan $A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^1 + A_4\lambda^0 = 0$
Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk memudahkan menunjukkan kestabilan sistem dengan melihat koefisien $\lambda^4, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^1$ dan konstanta dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Tabel 4.6. Tabel Routh Hurwitz

λ^4	A_0	A_2	A_4	0
λ^3	A_1	A_3	0	0
λ^2	B_1	A_4	0	0
λ^1	C_1	0	0	0
λ^0	D_1	0	0	0

Pembuktian untuk $A_0 = 1 > 0$

Kemudian untuk

$A_1 = b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + \ b + 2\alpha_1 + \phi_1 + \ e + d + 2\alpha_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1 > 0$

Analisis untuk A_2

$A_2 = (b + c + 2\alpha_1 + \phi_2)(e + d + 2\alpha_1) + (b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + e + d + 2\alpha_1) + (b + \phi_1 + 2\alpha_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1) - c\phi_3 - \phi_1\phi_2 > 0$

Analisis untuk A_3

$A_3 = (e + d + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2)(b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1) + (b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1) - c\phi_1\phi_3(b + \alpha_2 + 2\alpha_1 + b + 2\alpha_1) + cd\phi_2 > 0$

Pembuktian untuk A_4

$A_4 = (b + \phi_1 + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2)(e + d + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - c\phi_3(b + \phi_1 + 2\alpha_1 + b + 2\alpha_1 + \alpha_2) + cd\phi_2(b + \phi_1 + 2\alpha_1) + \phi_1\phi_2(b + 2\alpha_1 + \alpha_2 + e + d + 2\alpha_1) - c\phi_1\phi_3(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - cd\phi_1(\phi_2 + \alpha_2) > 0$

Hasil penjabaran untuk $B_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$

$(e + d + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2) + (b + 2\alpha_1 + \alpha_2 + b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + e + d + A_1A_2 - A_3 =$

$2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + 2\alpha_1 + \alpha_2)\big((b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + e + d + 2\alpha_1) - c\phi_3 - \phi_1\phi_2\big) + (b + 2\alpha_1 + \alpha_2 + b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) + c\phi_3) - cd\phi_2 - c\phi_1\phi_2 > 0$

Penjabaran untuk $C_1 = \frac{A_1A_2A_3 - A_3^1 - A_1^2A_4}{A_1A_2 - A_3}$

$A_1A_2A_3 - A_3^1 - A_1^2A_4 = (A_1A_2 - A_3)A_3 - A_1^2A_4 =$

$\big[(e + d + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2) + (b + 2\alpha_1 + \alpha_2 + b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + e + d + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + 2\alpha_1 + \alpha_2)\big((b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + e + d + 2\alpha_1) - c\phi_3 - \phi_1\phi_2\big) + (b + 2\alpha_1 + \alpha_2 + b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) + c\phi_3) - cd\phi_2 - c\phi_1\phi_2\big]$.

$[(e + d + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2)(b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1) + (b + 2\alpha_1 + \phi_1)(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \phi_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1) - c\phi_1\phi_3(b + \alpha_2 + 2\alpha_1 + b + 2\alpha_1) + cd\phi_2] -$

$[b + c + 2\alpha_1 + \phi_2 + b + 2\alpha_1 + \phi_1 + e + d + 2\alpha_1 + b + \alpha_2 + 2\alpha_1]^2[(b + \phi_1 + 2\alpha_1)(b + c + 2\alpha_1 + \phi_2)(e + d + 2\alpha_1)(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - c\phi_3(b + \phi_1 + 2\alpha_1 + b + 2\alpha_1 + \alpha_2) + cd\phi_2(b + \phi_1 + 2\alpha_1) + \phi_1\phi_2(b + 2\alpha_1 + \alpha_2 + e + d + 2\alpha_1) - c\phi_1\phi_3(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - cd\phi_1(\phi_2 + \alpha_2)] > 0$

Jelas bahwa $D_1 = A_4$ maka $A_4 > 0$

Karena nilai pada kolom pertama pada table Routh bernilai positif, maka persamaan tersebut mempunyai nilai eigen negatif dan dapat dikatakan stabil.

Setelah menunjukkan kestabilan dengan menganalisis, selanjutnya menunjukkan kestabilan yang ditampilkan dalam bentuk grafik dengan program *MATLAB* - *Ode-45*

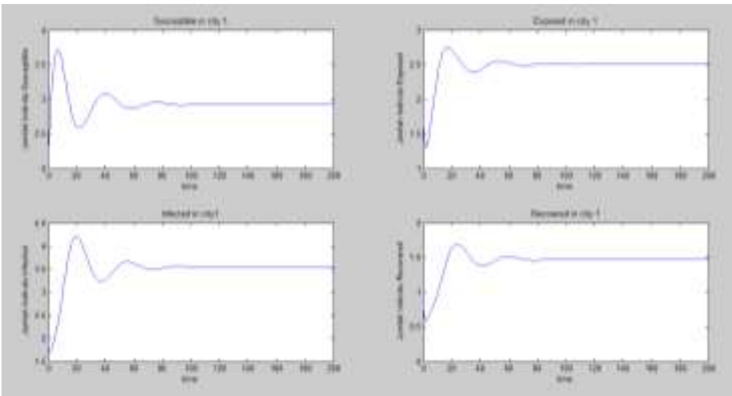
Hasil simulasi menggunakan *Ode45*

Tampilan grafik simulasi model penyebaran penyakit menular dengan semua individu berpindah.

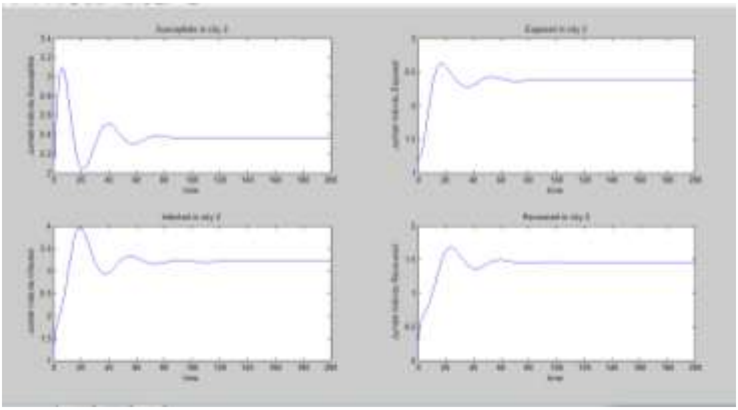
Dengan parameter:

$a = 1$, $b = 0.2$, $c = 0.3$, $d = 0.1$, $e = 0.4$,$\alpha_1 = 0.9$,
$\alpha_2 = 0.03$
Dan nilai awal
$\left(S_1(0), E_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0), R_2(0)\right) =$
$(2,2,2,1,2,1,1,0)$

a. Dengan mengambil $\beta = 0.6$ dan $\gamma = 0.09$ didapat bilangan reproduksi 0,82. Bilangan reproduksi menunjukkan hasil kurang dari satu bahwa terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil



Gambar 4.8 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 1



Gambar 4.9 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 2

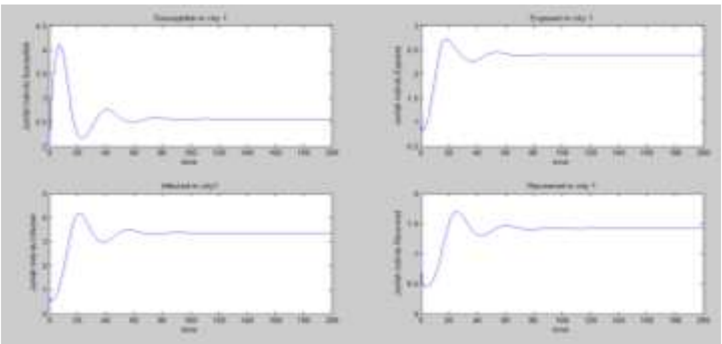
Laju individu Susceptible pada kedua kota terlihat mengalami kenaikan dan penurunan. Pada saat terjadi kenaikan yang terjadi adalah adanya perpindahan individu dari kota lain, adanya kelahiran serta sembuhnya individu yang terinfeksi sehingga kembali menjadi individu rentan. Sedangkan saat laju menurun terjadi karena perpindahan penduduk ke kota lain, individu rentan menjadi Exposed, adanya kontak dengan individu terinfeksi sehingga individu rentan menjadi sakit dan adanya kematian alami sehingga laju menjadi konstan.

Laju individu Exposed pada kedua kota mengalami kenaikan karena adanya peluang kontak dari individu rentan dengan individu terinfeksi kemudian menurun grafiknya karena individu Exposed berubah menjadi individu Infected. Kemudian mengalami kenaikan kembali karena adanya perpindahan individu dari kota lain. Selanjutnya turun kembali dan konstan karena adanya kematian alami, perpindahn individu ke kota lain.

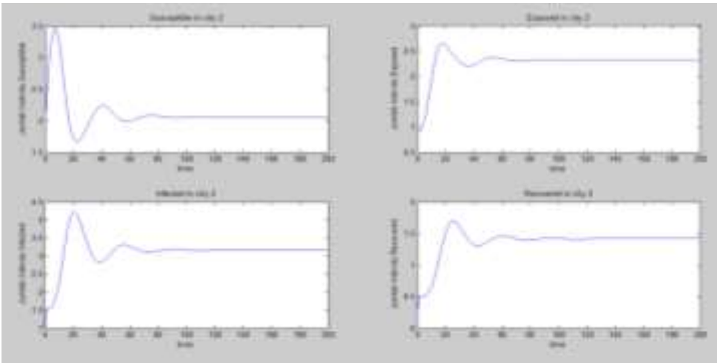
Laju perubahan individu Infected pada kedua kota nampak mengalami kenaikan. Ini dapat terjadi karena perubahan individu Exposed menjadi individu terinfeksi. Kemudian mengalami penurunan disebabkan oleh individu terinfeksi kembali sembuh dan adanya kematian karena penyakit ataupun alami. Dan mengalami kenaikan kembali karena adanya perpindahan individu dari kota lain. Kemudain menurun dan menjadi konstan karena individu berpindah ke kota lain.

Laju pertambahan individu Recovered terjadi karena inidvidu yang terinfeksi kembali sembuh. Kemudian grafik menunjukkan penurunan dikarenakan adanya kematian alami dan individu yang sudah sembuh kembali menjadi inidvidu rentan. Setelah itu pada grafik mengalami kenaikan kembali karena perpindahan individu dari kota lain. Kemduian menurun kembali karena individu ada yang berpindah ke kota lain.

b. Dengan mengambil $\beta = 0.6$ dan $\gamma = 0.2$ diperoleh nilai dasar reproduksinya 0,936. Hasil nilai dasar reproduksi kurang dari satu menandakan bahwa terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil



Gambar 4.10 Grafik Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 1



Gambar 4.11 Grafik Kestabilan Penyebaran Penyakit Menular Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 2

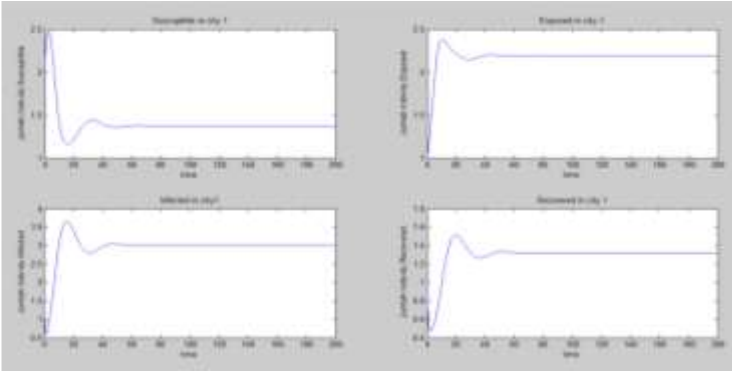
Laju pertumbuhan individu Susceptible pada kedua kota terlihat mengalami kenaikan yang sangat signifikan. Kenaikan ini dapat terjadi karena adanya kelahiran atau imigrasi kemudian mengalami penurunan yang juga sangat drastic, hal ini terjadi karena adanya kematian alami. Kemudia kembali mengalami kenaikan karena adanya individu yang sembuh masuk kembali menjadi individu rentan.selanjutnya mengalami penurunan kembali karena individu rentan berpeluang terinfeksi kembali karena kontak dengan penderita dan adanya individu yang melakukan perjalanan ke kota lain. Kemudian mengalami kenaikan dan menjadi konstan karena adanya penambahan dari individu dari kota lain.

Laju pertambahan individu Exposed terlihat mengalami kenaikan pada kedua kota. Kenaikan ini disebabkan karena kontak secara langsung maupun tak langsung dari individu rentan dengan individu yang terinfeksi. Kemudian mengalami penurunan karena kematian alami serta individu adanya yang menjadi terinfeksi. Kemudian mengalami kenaikan karena perpindahan individu yang melakukan perjalanan dari kota lain. Kemudian menurun dan menjadi konstan karena individu berpindah ke kota lain.

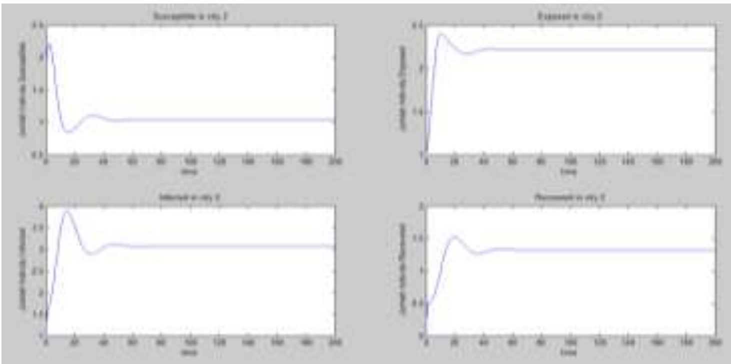
Laju perubahan individu Infected pada kedua kota dapat dilihat pada grafik yaitu yang pertama mengalami kenaikan. Kenaikan ini dapat terjadi karena inidvidu yang terkena kontak, terinfeksi dan menjadi bagian dari inidvidu Infected. Kemudian mengalami penurunan saat adanya individu terinfeksi meninggal (secara alami atau saat terinfeksi). Kemudian grafik menunjukkan kenaikan saat adanya perpindahan individu dari kota lain dan mnejadi konstan saat adanya individu yang berpindah ke kota lain serta indiviud yang terinfeksi sembuh kembali menjadi individu Recovered.

Laju individu Recovered pada hasil simulasi terlihat jelas bahwa mengalami kenaikan saat individu terinfeksi kembali sembuh, namun menurun kembali karena individu yang sembuh menjadi rentan kembali dan menjadi bagian dari individu rentan. Selanjutnya mengalami sedikit kenaikan dan penurunan dan menjadi stabil/konstan karena perpindahan individu dari kota lain maupun ke kota lain serta adanya individu yang meninggal secara alam (bukan karena penyakit).

c. Dengan mengambil $\beta = 0.6$ dan $\gamma = 1$ menghasilkan bilangan reproduksi dasar 1,8. Karena bilangan reproduksi dasar lebih dari satu menandakan terdapat titik kesetimbangan endemic yang stabil .



Gambar 4.12 Grfik Kestabilan Penyebaran Penyakit Menular Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 1



Gambar 4.13 Grfik Kestabilan Penyebaran Penyakit Menular Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 2

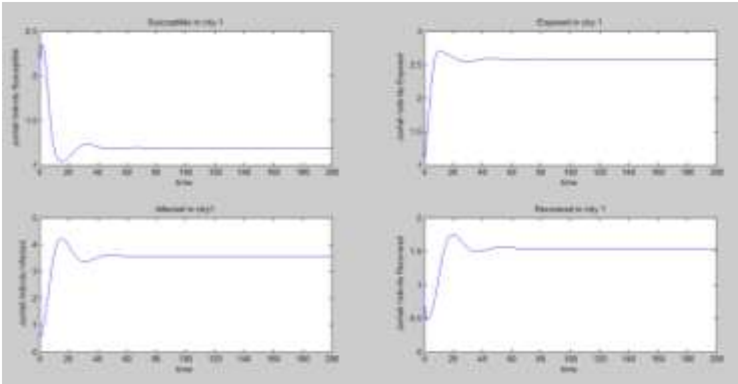
Laju perubahan Individu Rentan (Susceptible) pada kedua kota mengalami penurunan yang signifikan. Hal ini disebabkan oleh adanya kematian alami serta peluang kontak antara individu rentan dan terinfeksi. Kemudian mengalami kenaikan karena individu yang telah sembuh menjadi rentan. Setelah itu mengalami penurunan kembali dikarenakan adanya individu yang berpindah dari satu kota lain. Setelah itu menjadi turun dan konstan akibat adanya individu yang berpindah ke kota lain.

Selanjutnya untuk individu Exposed. Individu Exposed mengalami kenaikan. Hal ini jelas disebabkan karena inidviu yang rentan berpeluang mengalami kontak dengan individu yang terinfeksi sehingga menjadi individu dengan gejala infeksi pada saat grafik menurun. Saat adanya perpindahan individu dari kota lain, grafik menunjukkan adanya kenaikan. Turun kembali dan menjadi konstan saat individu berpindah ke kota lain serta adanya individu yang meninggal secara alami.

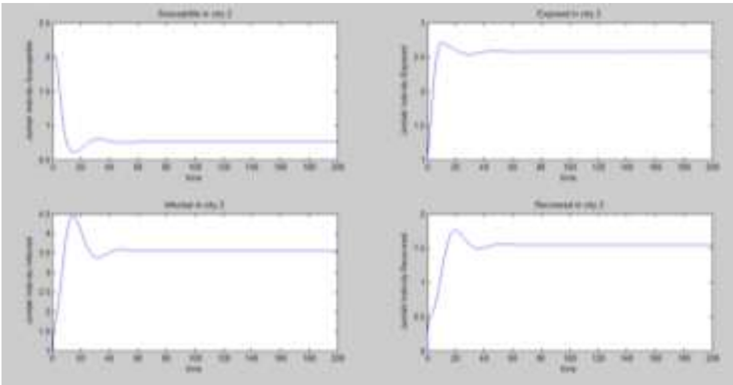
Penjabaran untuk individu Infected berdasarkan grafik adalah mula-mula mengalami kenaikan secara signifikan. Hal ini dapat terjadi karena individu yang telah menunjukkan gejala menjadi terinfeksi. Kemudian mengalami penurunan seiring waktu saat individu terinfeksi kembali sembuh. Setelah itu grafik naik saat perpindahan individu dari kota lain dan menjadi konstan seiring waktu saat adanya kematian dan perpindahan individu yang melakukan perjalanan ke kota lain.

Selanjutnya untuk analisis individu Recovered. Dapat dilihat pada gambar, bahwa laju pertumbuhan individu Recovered pada kedua kota mengalami kenaikan yang cukup tinggi. Hal ini dapat disebabkan karena individu yang telah terinfeksi telah mendapatkan penanganan sehingga menjadi sembuh. Kemudian individu yang sembuh menjadi rentan kembali maka grafik menunjukkan penurunan. Setelah itu adanya perpindahan dari kota lain (luat kota) yang menyebabkan grafik kembali naik. Saat adanya perpindahan ke kota lain dank arena kematian alami, grafik menjadi turun kemudian menjadi konstan seiring waktu.

d. Dengan mengambil $\beta = 0.95$ dan $\gamma = 1$ mneghasilkan nilai dasar reproduksi 2,2. Terlihat bahwa nilai reproduksi lebih dari satu yang berarti terdapat titik kesetimbangan endemic yang stabil



Gambar 4.14 Grafik Kestabilan Penyebaran Penyakit Menular Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 1



Gambar 4.15 Grafik Kestabilan Penyebaran Penyakit Menular Dengan Semua Individu Berpindah di Kota 2

Laju ertumbuhan individu rentan atau Susceptible mengalami penurunan . Kasus ini dapat disebabkan oleh adanya kematian alami serta kontak antara individu rentan dan terinfeksi. Kemudian mengalami kenaikan saat ada individu yang sembuh menjadi rentan dan penambahan individu dari kota lain yang sedang melakukan perjalanan. Kembali turun dan naik sehingga konstan karena adanya perpindahan individu ke kota lain.

Laju perubahan individu Exposed pada kedua kota menunjukkan pertumbuhan dengan arah naik. Kenaikan yang terjadi diduga adanya individu rentan yang menampakkan gejala, kemudian perpindahan individu ke kota lain menyebabkan penurunan jumlah inidvidu dan menjadi konstan seiring waktu.

Laju pada individu Infected. Pada individu Infected, dapat dilihat mengalami kenaikan karena individu dengan gejala menjadi terinfeksi dan dapat menularkan penyakit. Kemudian mengalami penurunan seiring waktu saat adanya individu yang berpindah ke kota lain serta adanya kematian karena penyakit kemudian kembali menanjak terus konstan karena perpindahan individu dari kota lain.

Pada individu Recovered juga mengalami kenaikan. Kenaikan ini terjadi karena individu Infected telah sembuh kemudian mengalami penurunan saat individu sembuh kembali menjadi rentan. Grafik menunjukkan sedikit kenaikan menuju konstan saat adanya pertambahan dari individu yang berpindah dari kota lain serta penurunan dari individu yang berpindah ke kota lain dan adanya kematian alami.

LAMPIRAN

Listing program dengan menggunakan *MATLAB- Ode45*

1. Model Penyebaran Penyakit Menular Tanpa Adanya Perpindahan Individu

```
a = 1;
b = 0.2;
c = 0.3;
d = 0.1;
e = 0.4;
alpha_1 = 0.9;
alpha_2 = 0.03;
beta = 0.6;
N = 5;

f = @(t,x)[a-beta*x(1)*x(3)/N-
b*x(1)+alpha_2*x(4);
    beta*x(1)*x(3)/N-(b+c)*x(2);
    c*x(2)-(d+e)*x(3);
    d*x(3)-(b+c)*x(4)];
[t,xa]=ode45(f,[0 100],[2 1 1 0]);

figure
subplot(2,2,1);
plot(t,xa(:,1));
title('Susceptible');
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
S');

subplot(2,2,2);
plot(t,xa(:,2));
title('Exposed');
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
E');

subplot(2,2,3);
plot(t,xa(:,3));
```

```
title('Infected');
xlabel('time'),ylabel('Jumlah individu
I');

subplot(2,2,4);
plot(t,xa(:,4));
title('Recovered');
xlabel('time'),ylabel('Jumlah individu
R');
```

2. Model Penyebaran Penyakit Dengan Individu Susceptible dan Exposed Berpindah

```
a = 1;
b = 0.2;
c = 0.3;
d = 0;1;
e = 0.4;
alpha(1) = 0.9;
alpha(2) = 0.03;
N(1) = 5;
N(2) = 5;
beta = 0.6;

f = @(t,x)[a-b*x(1)-
beta*x(1)*x(3)/N(1)+alpha(2)*x(4)+alpha(1)
*x(5)-alpha(1)*x(1);
    beta*x(1)*x(3)/N(1)-
(b+c+alpha(1))*x(2)+alpha(1)*x(6);
    c*x(2)-(e+d)*x(3);
    d*x(3)-(b+alpha(2))*x(4);
    a-b*x(5)-
beta*x(5)*x(7)/N(2)+alpha(2)*x(8)-
alpha(1)*x(5)+alpha(1)*x(1);
    beta*x(5)*x(7)/N(2)-
(b+c+alpha(1))*x(6)+alpha(1)*x(2);
    c*x(6)-(e+d)*x(7);
    d*x(7)-(b+alpha(2))*x(8);]
[t,xa]=ode45(f,[0 200],[2 1 1 1 2 0 0 1]);


  figure
```

```
subplot(2,2,1);
plot(t,xa(:,1))
title('Susceptible in city 1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah
IndividuSusceptible')

subplot(2,2,2);
plot(t,xa(:,2))
title('Exposed in city 1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah
IndividuExposed')

subplot(2,2,3);
plot(t,xa(:,3))
title('Infected in city1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Infected')

subplot(2,2,4);
plot(t,xa(:,4))
title('Recovered in city 1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Recovered')

figure
subplot(2,2,1);
plot(t,xa(:,5))
title('Susceptible in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Susceptible')

subplot(2,2,2);
plot(t,xa(:,6))
title('Exposed in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Exposed')

subplot(2,2,3);
plot(t,xa(:,7))
title('Infected in city 2')
```

```
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Infected')

subplot(2,2,4);
plot(t,xa(:,8))
title('Recovered in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Recovered')
```

3. Model Penyebaran Penyakit Dengan Semua Individu Berpindah

```
a = 1;
b = 0.2;
c = 0.3;
d = 0.1;
e = 0.4;
alpha(1) = 0.9;
alpha(2) = 0.03;
N(1) = 5;
N(2) = 5;
beta = 0.95;
gamma = 1;

f = @(t,x)[a-
b*x(1)*x(3)/N(1)+alpha(2)*x(4)-
alpha(1)*x(1)+alpha(1)*x(5)-
gamma*alpha(1)*x(5)*x(7)/N(2);
    beta*x(1)*x(3)/N(1)-
(b+c+alpha(1))*x(2)+alpha(1)*x(6)+gamma*alp
ha(1)*x(5)*x(7)/N(2);
    c*x(2)-
(e+d+alpha(1))*x(4)+alpha(1)*x(8);
    d*x(3)-
(b+alpha(1)+alpha(2))*x(4)+alpha(1)*x(8);
    a-b*x(5)-
beta*x(5)*x(7)/N(2)+alpha(2)*x(8)-
alpha(1)*x(5)+alpha(1)*x(1)-
gamma*alpha(1)*x(1)*x(3)/N(2);
    beta*x(5)*x(7)/N(2)-
(b+c+alpha(1))*x(6)+alpha(1)*x(2)+gamma*alp
ha(1)*x(1)*x(3)/N(1);
```

```
    c*x(6)-
(e+d+alpha(1))*x(8)+alpha(1)*x(4);
    d*x(7)-
(b+alpha(1)+alpha(2))*x(8)+alpha(1)*x(4);]
;
[t,xa]=ode45(f,[0 200],[2 1 1 1 2 1 1 0]);

figure
subplot(2,2,1);
plot(t,xa(:,1))
title('Susceptible in city 1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Susceptible')

subplot(2,2,2);
plot(t,xa(:,2))
title('Exposed in city 1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Exposed')

subplot(2,2,3);
plot(t,xa(:,3))
title('Infected in city1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Infected')

subplot(2,2,4);
plot(t,xa(:,4))
title('Recovered in city 1')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Recovered')

figure
subplot(2,2,1);
plot(t,xa(:,5))
title('Susceptible in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Susceptible')

subplot(2,2,2);
```

```
plot(t,xa(:,6))
title('Exposed in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Exposed')

subplot(2,2,3);
plot(t,xa(:,7))
title('Infected in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Infected')

subplot(2,2,4);
plot(t,xa(:,8))
title('Recovered in city 2')
xlabel('time'),ylabel('Jumlah Individu
Recovered')
```

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini memberikan kesimpulan dari hasil analisis model yang telah diperoleh beserta simulasi dan saran sebagai pertimbangan penelitian selanjutnya.

5.1. Kesimpulan

Analisis model penyebaran penyakit menular tipe *SEIRS* yang berkaitan dengan transportasi antar-dua kota dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan untuk model penyebaran penyakit tanpa perpindahan individu

a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$P_1(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*) = (\frac{a}{b}, 0,0,0, \frac{a}{b}, 0,0,0)$

b. Titik kesetimbangan endemik dari hasil analisis adalah

$P_1(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$

Dengan :

$$S^* = \frac{acd - R^*[(b+\alpha_2)(be+bd+ce)+bcd]}{bcd}$$

$$E^* = \frac{(e+d)I^*}{c} = \frac{(b+\alpha_2)(e+d)}{cd} R^*$$

$$I^* = \frac{(b+\alpha_2)}{d} R^*$$

c. Diperolah keadaan jika $\frac{\beta c}{(e+d)(b+c)} < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada dan stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak ada.

d. Jika keadaan $\frac{\beta c}{(e+d)(b+c)} > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada namun tidak stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik ada dan stabil.

2. Pada model persamaan hanya individu Susceptible dan Infected berpindah memberikan kesimpulan:

a. Titik kesetimbangan bebas penyakitnya
$P_1(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*) = (\frac{a}{b}, 0,0,0, \frac{a}{b}, 0,0,0)$

b. Titik kesetimbangan endemiknya
$P_1(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$

Dengan

$$S_1^* = \frac{(b+\alpha_1)}{b(b+2\alpha_1)}\left\{a + \alpha_2 R_1^* + \alpha_1 \left[\frac{1}{(b+\alpha_1)}\left(a + \alpha_2 R_2^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right)\right] - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)}{cd} R_1^*\right\}$$

$$E_1^* = \frac{(e+d)I_1^*}{c} = \frac{(b+\alpha_2)(e+d)}{cd} R_1^*$$

$$I_1^* = \frac{(b+\alpha_2)}{d} R_1^*$$

$$S_2^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}\left\{a + \alpha_2 R_2^* + \alpha_1 \frac{(b+\alpha_1)}{b(b+2\alpha_1)}\left[a + \alpha_2 R_1^* + \alpha_1\left(\frac{1}{(b+\alpha_1)}\left(a + \alpha_2 R_2^* - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right)\right) - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_1^*}{cd}\right] - \frac{(b+\alpha_2)(b+c)(e+d)R_2^*}{cd}\right\}$$

$$E_2^* = \frac{(e+d)I_2^*}{c} = \frac{(b+\alpha_2)(e+d)}{cd} R_2^*$$
$$I_2^* = \frac{(b+\alpha_2)}{d} R_2^*$$

c. Dengan keadaan $\frac{\beta c}{(e+d)(b+c)} < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada dan stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak ada.

d. Namun jika $\frac{\beta c}{(e+d)(b+c)} > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada namun tidak stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik ada dan stabil.

3. Pada model persamaan dengan semua individu berpindah

a. Titik kesetimbangan bebas penyakitnya

$P_1(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*) = (\frac{a}{b}, 0,0,0, \frac{a}{b}, 0,0,0)$

b. itik kesetimbangan endemicnya ialah

$P_1(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$

$$S_1^* = \frac{1}{(b+\alpha_1)}\left[a + \alpha_1 \frac{(b+\alpha_1)}{b(b+2\alpha_1)}\left\{-(b+c+\alpha_1)E_2^* + \alpha_1 E_1^* + \alpha_2 R_2^* + \alpha_1\left[\frac{1}{(b+\alpha_1)}[a + \alpha_2 R_1^* - (b+c+\alpha_1)E_1^* + \alpha_1 E_2^*]\right]\right\} + \alpha_2 R_1^* - (b+c+\alpha_1)E_1^* + \alpha_1 E_2^*\right]$$

$$E_1^* = \frac{(e+d+\alpha_1)I_1^* - \alpha_1 I_2^*}{c}$$

$$I_1^* = \frac{(b+\alpha_1+\alpha_2)R_1^* - \alpha_1 R_2^*}{d}$$

$$S_2^* = \frac{(b+\alpha_1)}{b(b+2\alpha_1)}\left\{-(b+c+\alpha_1)E_2^* + \alpha_1 E_1^* + \alpha_2 R_2^* + \alpha_1\left[\frac{1}{(b+\alpha_1)}[a + \alpha_2 R_1^* - (b+c+\alpha_1)E_1^* + \alpha_1 E_2^*]\right]\right\}$$

$$E_2^* = \frac{(e+d+\alpha_1)I_2^* - \alpha_1 I_1^*}{c}$$

$$I_2^* = \frac{(b+\alpha_1+\alpha_2)R_2^* - \alpha_1 R_1^*}{d}$$

c. Diperoleh keadaan $\frac{c(\beta+\gamma\alpha_1)}{(e+d)(b+c)} < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada dan stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak ada.

d. Namun jika keadaan $\frac{c(\beta+\gamma\alpha_1)}{(e+d)(b+c)} > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada namun tidak stabil sedangkan titik kesetimbangan endemik ada dan stabil.

4. Hasil simulasi menunjukkan bahwa

a. Pada model dengan individu tidak berpindah dan pada model dengan hanya individu Susceptible dan Exposed yang berpidah dengan mengambil $\beta = 0.6$ didapat bilangan rerpoduksinya $0{,}72 < 1$ yang menandakan terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. Jika mengambil $\beta = 0{,}95$ didapat bilangan reproduksinya $1{,}14 > 1$ mempunyai makna terdapat titik kesetimbangan endemic yang stabil.

b. Pada model dengan semua individu berpindah dengan mengambil $= 0{,}6$, $\gamma = 0{,}09$ dan $\beta = 0{,}95$, $\gamma = 0{,}2$ didapat bilangan reproduksi 0,82 dan 0,936. Karena bilangan reproduksi bernilai kurang dari satu berarti terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. Jika mengambil $= 0{,}6$, $\gamma = 1$ dan $\beta = 0{,}95$, $\gamma = 1$ mendapat bilangan reproduksi 1,8 dan 2,22. Bilangan reproduksi menunjukkan lebih dari satu dapat diartikan bahwa terdapat titik kesetimbangan endemic yang stabil.

5.2. Saran

Pada permbahasan Tugas Akhir ini telah dijelaskan analisis stabilitas model matematika dari penyebaran penyakit menular melalui transportasi antar dua kota. Perlu dikembangkan lagi untuk penelitian selanjutnya dengan populasi berbeda dan tingkat penyebaran penyakit yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

1. Diakses 10 Juli 2016. Penyakit menular. http://mencegahpenyakit.com/pengertian-penyakit-menular/
2. Hidayati, K. 2013. *Kestabilan Dan Bifurkasi Model Epidemik SEIR Dengan Laju Kesembuhan Tipe Jenuh*. Tugas Akhir Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.
3. Depenphedtnog. A., dkk.2013. *On The Dynamic of SEIRS Epidemic Model With Transport-Rekated Infection. Elsevier.*
4. Sari, A. N.2011.*Analisis Stabilitas Model Matematika Dari Penyebaran Penyakit Menular Melalui Transportasi Antar-Dua Kota*. Tugas Akhir Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya
5. Fathoni, M.A. *Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Penyakit Menular Tipe SEIS Melalui Transportasi Antar Kota*. Tugas Akhir Jursuan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang.
6. Kartikasari, N. 2013. *Solusi Model Penyebaran Penyakit Influenza Melalui Transportasi Antar Dua Kota dengan Metode Runge-Kutta. Tugas Akhir Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.*
7. Ma, Z. Dan Li, J. 2009. *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*. Singapore: World Scientific Plubishing.
8. Anton, H. 1990. *Aljabar Linier* (diterjemahkan oleh: Pantur Silaban. ITB:Erlangga.
9. Budhi, W.S.1995.*Aljabar Linier*. Jakarta: Gramedia.
10. Adriansyah, A.*Dasar Sistem Kontrol*. Pusat Pengembangan Bahan Ajar UMB.
11. Diakses 9 Juli 2016.Transportasi.*Sridianti.com*
12. Subiono.2013. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya

13. Diakses tanggal 10 Juli 2016. Penyakit Menular. https://id.wikipedia.org/wiki/Wabah

BIODATA PENULIS

Penulis bernama lengkap Devi Yolanda, lahir di Surabaya pada 24 Agustus 1991 sebagai anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Yoseph Halim (alm) dan Lilik. Penulis bertempat tinggal di Surabaya, Jalan Lebo Agung Gg. II. Penulis menempuh pendidikan formal di SDK Santa Theresia II Surabaya(1997-2003), SMPK Santa Agnes Surabaya (2003-2006), dan SMAK Santa Agnes Surabaya (2006-2009). Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi jenjang S1 dan diterima di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN tulis pada tahun 2009 dengan NRP 1209 100 081. Di Jurusan Matematika penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan, khususnya rumpun simulasi dan model. Selain aktif kuliah, penulis juga sebagai anggota HIMATIKA-ITS dan panitia Olimpiade Matematika ITS (OMITS). Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir dapat ditujukan ke penulis melalui email: mrs.marazzi@gmail.com.